

Analiza II - pytania próbne

Instrukcja: Zaznacz wszystkie prawidłowe odpowiedzi

1. Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna. Wówczas:

- (a) Funkcja $g(x) = \cos f(x)$ jest funkcją całkowalną w sensie Riemanna.
- (b) Jeżeli f jest różniczkowalna i f' jest funkcją całkowalną na przedziale $[\alpha, \beta]$, $a < \alpha < \beta < b$, to

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x) dx = f(\beta) - f(\alpha).$$

- (c) Funkcja $g(x) = \int_a^x f(x) dx$ jest różniczkowalna wewnątrz przedziału $[a, b]$.

2. Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi. Wówczas

- (a) jeżeli F jest funkcją pierwotną funkcji f , G jest funkcją pierwotną funkcji g i $f = g$ to funkcja $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in [a, b]$, jest stała.
- (b) jeżeli F jest funkcją pierwotną funkcji f i G jest funkcją pierwotną funkcji g to $(FG)'(x) = f(x)g(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$.
- (c) jeżeli F jest funkcją pierwotną funkcji f i $f(x) \leq 0$ dla każdego $x \in [a, b]$ to

$$|F(b) - F(a)| = - \int_a^b f(x) dx.$$

3. Niech

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & \text{if } x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

Funkcja f jest

- (a) ciągła na przedziale $[-1, 1]$,
- (b) różniczkowalna w punkcie $x = 0$
- (c) całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[-1, 1]$

4. Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami ograniczonymi. Wówczas,

- (a) jeżeli f jest ciągła a g całkowalna w sensie Riemanna to $f \circ g$ jest całkowalna w sensie Riemanna,
- (b) jeżeli f jest ciągła a g całkowalna w sensie Riemanna oraz $g(x) \leq f(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$ to istnieje $y \in [a, b]$, takie że

$$\int_a^b g(x) dx \leq (b - a) \sup_{y \in [a, b]} f(y),$$

- (c) jeżeli f jest ciągła i $f(x) > 0$ dla każdego $x \in [a, b]$, to $1/f$ jest całkowalna w sensie Riemanna,

5. Niech

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \leq n \\ 1 - \cos(\frac{x}{n}) & \text{dla } n < x \end{cases} \quad g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ \frac{\text{ctg}(x)}{n} & \text{dla } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{dla } x \geq \pi \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

- (a) ciąg funkcyjny $f_n(x)$ jest zbieżny punktowo ale nie jednostajnie do funkcji $f(x) \equiv 1$,
- (b) ciąg funkcyjny $f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji $f(x) \equiv 1$,
- (c) ciąg funkcyjny $g_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji $h(x) \equiv 0$,

- (d) ciąg funkcyjny $h_n(x) = g_n(x)f_n(x)$ jest zbieżny punktowo ale nie jednostajnie do funkcji $h(x) \equiv 0$.
6. Niech promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$ wynosi R , $0 < R < \infty$. Wówczas
- (a) funkcja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest analityczna w przedziale $(-R, R)$,
 - (b) funkcja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest różniczkowalna w przedziale $(-R, R)$ oraz $f'(0) = a_1$,
 - (c) funkcja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest ciągła w przedziale $(-R, R)$
 - (d) szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ może być rozbieżny w każdym punkcie okręgu $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$.

7. Szereg Fouriera funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi & \text{dla } -\pi < x \leq 0 \\ -x + \pi & \text{dla } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

jest

- (a) zbieżny punktowo do $f(x)$ dla każdego x ,
 - (b) zbieżny punktowo do $f(x)$ dla każdego x z wyjątkiem punktów $x = 0, \pi$,
 - (c) zbieżny punktowo do $f(x)$ dla każdego x z wyjątkiem punktów $x = \pi$,
 - (d) zbieżny punktowo do $f(x)$ dla każdego x z wyjątkiem punktu $x = 0$.
8. Niech A będzie zbiorem zwartym niepustym w przestrzeni metrycznej (X, d)
- (a) zbiór A jest ograniczony,
 - (b) zbiór $X \setminus A$ jest otwarty,
 - (c) każda funkcja ciągła $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona,
 - (d) każda funkcja ciągła $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła,