Analiza matematyczna 1 - test egzaminacyjny wersja do ćwiczeń

Leszek Skrzypczak

1. Niech $E = \{x \in [0,1] : \ x = \frac{k}{2^n} \ k = 1, 2, \dots 2^n, \ n = 1, 2, 3, \dots\}$ Wówczas:
   (a) Dla dowolnych liczb wymiernych $p, q \in [0,1]$, $p < q$, istnieje $x \in E$ takie, że $p < x < q$.
   (b) Każda liczba wymierna $p \in [0,1]$ jest punktem skupienia zbioru E.
   (c) Liczby niewymierne należące do przedziału $[0,1]$ nie są puktami skupienia zbioru E.

2. Niech $E \subset \mathbb{R}$ będzie niepustym zwartym podzbiorem prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$. Wówczas:
   (a) $\mathbb{R} \setminus E$ jest zbiorem ograniczonym,
   (b) E zawiera wszystkie swoje punkty skupienia,
   (c) dla każdego punktu $p \in E$ istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $(p - \varepsilon, p + \varepsilon) \subset E$.

3. Niech E i F będą niepustymi podzbiorami prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ i niech $F \subset E$.
   (a) Jeżeli E jest zbiorem otwartym to F jest otwarty.
   (b) Jeżeli E jest zbiorem zwartym to F jest ograniczony.
   (c) Jeżeli E jest zbiorem ograniczonym i F jest domknięty to F jest zwarty.

4. Które z poniższych warunków (a) - (c) implikują, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z dołu:
   (a) $\forall_{x \in A} \exists_{M \in \mathbb{R}} \quad x \geqslant M$,
   (b) $\exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{x \in A} \quad x \geqslant M$,
   (c) $\exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{x \in A} \quad x > M$.

5. Załóżmy, że liczba rzeczywista x jest ograniczeniem górnym zbioru $A \subset \mathbb{R}$. Które z poniższych warunków implikują, że x jest kresem górnym zbioru A:
   (a) $\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{a \in A} \quad a > x + \frac{1}{n}$,

(b) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\exists_{a\in A} \quad a > x - \frac{1}{n}$,

(c) $\forall_{\epsilon>0}\exists_{a\in A} \quad a > x - \epsilon$.

6. Niech $E = \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \ldots\} \cup [1, 2] \cup \{3\} \subset \mathbb{R}$.

   (a) 0 jest punktem skupienia zbioru E,

   (b) 3 jest punktem skupienia zbioru E,

   (c) $\frac{3}{2}$ jest punktem skupienia zbioru E,

7. Niech $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Ciąg (a_n)

   (a) jest ograniczony

   (b) jest ciągiem Cauchy'ego,

   (c) nie zawiera podciągu zbieżnego.

8. Które spośród warunków (a),(b),(c) oznaczają, że ciąg (a_n) liczb rzeczywistych jest ciągiem Cauchy'ego ?

   (a) $\exists_{\varepsilon>0}\forall_{N\in\mathbb{N}}\exists_{n,m>N}|a_n - a_m| < \varepsilon$.

   (b) $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\exists_{n,m>N}|a_n - a_m| < \varepsilon$.

   (c) $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n,m>N}|a_n - a_m| < \varepsilon$.

9. Jakie zależności zachodzą między własnościami:
   1 - ciąg (a_n) zawiera podciąg zbieżny,
   2 - ciąg (a_n) jest zbieżny,
   3 - ciąg (a_n) jest ograniczony ?

   (a) $3 \Rightarrow 1$ i $2 \Rightarrow 1$,

   (b) $1 \Rightarrow 2$ i $2 \Rightarrow 3$,

   (c) $3 \Rightarrow 1$ i $2 \Rightarrow 3$.

10. Spośród tekstów (a)-(c) zaznacz te, które po wstawieniu w miejsce kropek w zdaniu:

    "Każdy ciąg elementów zbioru .... ma podciąg zbieżny do pewnego elementu zbioru A"

    utworzą twierdzenie prawdziwe.

    (a) $A = \{x \in \mathbb{R} : |\, x \,| \geqslant 1\}$,

    (b) A liczb niewymiernych z odcinka otwartego $(-1, 1)$,

    (c) $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \geqslant x^2\}$.

11. Niech (a_n) będzie ciągiem monotonicznym i ograniczonym. Wówczas:

    (a) dla dowolnych stałych p i q ciąg $b_n = pa_n + q$ jest zbieżny,

(b) ciąg $b_n = 1 + a_n + (-1)^n n$ jest rozbieżny

(c) jeżeli a_n jest rosnący i $b_n = -a_n$ to $\lim_{n\to\infty} b_n = -\sup_n a_n$.

12. Załóżmy, że f jest funkcją rosnącą na przedziale $(1, 5)$. Zaznacz równości prawdziwe

   (a) $\lim_{x\to 3-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in (2, 3)\}$,

   (b) $\lim_{x\to 2+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in (2, 5)\}$,

   (c) $\lim_{x\to 4-} f(x) = \inf\{f(x) : x \in (1, 4)\}$.

13. Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma własność

$$\forall_{C>0} \exists_{x_0\in\mathbb{R}} \forall_{x>x_0} f(x) > C.$$

   Z własności tej wynika, że:

   (a) f ma w punkcie $+\infty$ granicę niewłaściwą równą $-\infty$,

   (b) f ma w punkcie $+\infty$ granicę niewłaściwą równą $+\infty$,

   (c) f ma w punkcie $-\infty$ granicę niewłaściwą równą $+\infty$.

14. Rozważmy własności (1)-(2) funkcji $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ określoną na przedziale otwartym $(0, 1)$.

   (1) $\forall_{x\in[0,1]} \forall_{\epsilon\in[0,1]} \exists_{\delta\in[0,1]} \forall_{y\in[0,1]} (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$,

   (2) $\forall_{\epsilon\in[0,1]} \exists_{\delta\in[0,1]} \forall_{x,y\in[0,1]} (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$.

   Jakie związki zachodzą między tymi własnościami ?

   (a) $1 \Rightarrow 2$,

   (b) $2 \Rightarrow 1$,

   (c) $1 \Leftrightarrow 2$.

15. Niech $f : A \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Następujący warunek gwarantuje istnienie punktu $x_o \in A$, takiego że $f(x_o) = \inf_{x\in A} f(x)$.

   (a) A jest zbiorem otwartym,

   (b) A jest zbiorem zwartym,

   (c) $A = [0, 1]$

16. Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Który z następujących warunków gwarantuje jednostajną ciągłość funkcji f?

   (a) Funkcja f jest różniczkowalna na przedziale (a, b),

   (b) Istnieje funkcja ciągła g określona na przedziale $[a, b]$ taka, że $\forall x \in (a, b)$ $f(x) = g(x)$,

   (c) Funkcja f jest ciągła na przedziale (a, b).

17. O funkcji f dwukrotnie różniczkowalnej na przedziale $(-1,1)$, której pochodna f' jest funkcją ściśle rosnącą (tzn. $f'(x_1) < f'(x_2)$ jeśli $x_1 < x_2$) oraz $f'(0) = 0$ można powiedzieć, że:

    (a) nie ma w punkcie $x = 0$ punktu przegięcia,

    (b) jest funkcją wklęsłą,

    (c) ma w punkcie $x = 0$ minimum lokalne.

18. Niech $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną w każdym punkcie przedziału (a,b). Niech $a < \alpha < \beta < b$. Wówczas:

    (a) f jest ciągła na przedziale (α,β),

    (b) istnieje punkt $c \in (\alpha,\beta)$ taki, że
    $$f(\alpha) - f(\beta) = f'(c)(\alpha - \beta)$$

    (c) f jest ograniczona na przedziale $[\alpha,\beta]$,

19. Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a,b \in \mathbb{R}$, będzie funkcją ciągłą, różniczkowalną w każdym punkcie przedziału (a,b). Wówczas:

    (a) istnieje punkt $c \in [a,b]$ w którym funkcja f przyjmuje największa wartość.

    (b) Niech $g(x) = (x-a)f(x)$. Istnieje punkt $c \in [a,b]$ taki, że $g'(c) = f(b)$.

    (c) Jeżeli $\forall x \in (a,b)\ f'(x) < 0$ to $f(a) \neq f(b)$.

20. Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ i $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi. Wówczas

    (a) jeżeli F jest funkcją pierwotną funkcji f, G jest funkcją pierwotną funkcji g i $f = g$ to funkcja $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in [a,b]$, jest stała.

    (b) jeżeli F jest funkcją pierwotną funkcji f i G jest funkcją pierwotną funkcji g to $(FG)'(x) = f(x)g(x)$ dla każdego $x \in [a,b]$.

    (c) jeżeli F jest funkcją pierwotną funkcji f i $f(x) \leqslant 0$ dla każedego $x \in [a,b]$ to
    $$|F(b) - F(a)| = -\int_a^b f(x)dx.$$

21. Niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, różniczkowalną w każdym punkcie wewnętrznym przedziału $[0,1]$. Wówczas

    (a) jeżeli f' jest funkcją ograniczoną to istnieje stała $C > 0$, taka że dla dowolnych $x,y \in [0,1]$
    $$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|.$$

(b) jeżeli $f(1) = 0$ to dla każdego $x \in (0, 1]$ istnieje $y \in (0, 1]$, takie że

$$f(x) = (x - 1)f'(y) \,.$$

(c) jeżeli $f(0) = f(1)$ to istnieje $x \in [0, 1]$, taki że $f'(x) = 0$.

22. Wskaż ciągi, które zawierają co najmniej dwa podciągi zbieżne do różnych granic:

    (a) $a_n = (-1)^n + 2^{-n}$,
    (b) $b_n = sin(\frac{n\pi}{2})$,
    (c) $c_n = n^{-1} + 2^{-n}$,

23. Zaznacz te pary składające się z liczby a i funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że a jest największą wartością funkcji f:

    (a) $a = 0$, $f(x) = -e^{-x}$,
    (b) $a = 1$, $f(x) = 1 - x^2$,
    (c) $a = 2$, $f(x) = \frac{2x^2}{1+x^2}$.

24. Ciąg liczbowy (a_n) jest zbieżny. Wynika stąd, że:

    (a) jeżeli ciąg (b_n) jest zbieżny to zbieżny jest również ciąg $(a_n + b_n)$,
    (b) jeżeli ciąg $(a_n + b_n)$ jest zbieżny to zbieżny jest również ciąg (b_n),
    (c) jeżeli ciąg $(a_n + b_n)$ jest rozbieżny to rozbieżny jest również ciąg (b_n).

25. Niech $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ będzie trzykrotnie różniczkowalna w każdym punkcie przedziału $(0, 1)$.

    (a) jeżeli $f'(y) = 0$ i $f''(y) < 0$ to funkcja f ma w punkcie $y \in (0, 1)$ maksimum lokalne.
    (b) jeżeli $f'(y) = f''(y) = 0$ i $f'''(y) < 0$ to funkcja f' ma w punkcie $y \in (0, 1)$ punkt przegięcia.
    (c) jeżeli $f''(y) > 0$ dla pewnego $y \in (0, 1)$ to istnieje $\varepsilon > 0$, takie że na przedziale $(y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ funkcja f' jest rosnąca.

26. Czy szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin(\frac{1}{n})$ jest:

    (a) Zbieżny warunkowo,

    (b) Zbieżny bezwzględnie,

    (c) nie jest zbieżny.

27. Który zszeregów jest bezwzględnie zbieżny?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$,

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$,

(c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2}$.

28. Który z szeregów jest rozbieżny?

(a) $\sum_{n=2}^{\infty}\pi^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{n}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-5)^n}{\sqrt{n^n}}$.

29. Który z szeregów liczbowych jest warunkowo zbieżny?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{n}{n^3+1}\right)$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2$.