

Program wykładu z analizy matematycznej 2

1. Całka nieoznaczona

- _ Definicja i istnienie funkcji pierwotnej.
- _ Całkowanie przez części i przez podstawienie.
- _ Wzory rekurencyjne.
- _ Obliczanie podstawowych typów całek nieoznaczonych:
 - całkowanie funkcji wymiernych;
 - całkowanie funkcji niewymiernych, podstawienia Eulera;
 - całkowanie funkcji trygonometrycznych.

2. Całka Riemanna

- _ Definicja całki Riemanna, kryterium całkowalności.
- _ Całkowalność funkcji ciągłej, całkowalność funkcji monotonicznej.
- _ Własności całki.
- _ Całkowanie ciągów i szeregów funkcyjnych.
- _ Twierdzenie o funkcji górnej granicy całkowania, wzór Newtona-Leibniza.
- _ Wzory na całkowanie przez części i przez podstawienie dla całek oznaczonych.
- _ Twierdzenia o wartości średniej w rachunku całkowym.
- _ Geometryczne zastosowania całek: pole figury, długość łuku, objętość bryły obrotowej.
- _ Definicja logarytmu za pomocą całki, funkcja wykładnicza.

3. Całki niewłaściwe

- _ Definicja i podstawowe własności całek niewłaściwych.
- _ Zbieżność bezwzględna i warunkowa, kryteria: Cauchy'ego, porównawcze i Dirichleta.
- _ Całkowe kryterium zbieżności szeregów.

4. Elementy analizy zespolonej

- _ Definicja i podstawowe własności liczb zespolonych.
- _ Zbieżność w \mathbb{C} , ciągi i szeregi o wyrazach zespolonych.
- _ Granica i ciągłość funkcji zespolonych.
- _ Różniczkowanie i całkowanie funkcji określonych na przedziale i przyjmujących wartości zespolone.
- _ Pochodna funkcji zespolonej i jej podstawowe własności (bez równań Cauchy'ego-Riemanna).

5. Szeregi potęgowe

- _ Szereg potęgowy, promień zbieżności, wzór Cauchy'ego-Hadamarda, własności sumy szeregu potęgowego w przedziale zbieżności (różniczkowanie i całkowanie w przypadku szeregu o wyrazach rzeczywistych).
- _ Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy. Rozwinięcia funkcji wykładniczej i funkcji trygonometrycznych, szereg dwumienny.
- _ Przykład funkcji klasy gładkiej, która nie jest analityczna.
- _ Zachowanie się sumy szeregu potęgowego na końcach przedziału zbieżności, twierdzenie Abela.
- _ Analityczne definicje funkcji trygonometrycznych, związek pomiędzy funkcją wykładniczą i funkcjami trygonometrycznymi, wzory Eulera.

6. Szeregi Fouriera

- _ Szereg Fouriera, wzory Eulera-Fouriera.
- _ Lemat Riemanna-Lebesgue'a.
- _ Całka Dirichleta, zasada lokalizacji. Zbieżność punktowa szeregu Fouriera.
- _ Zamkniętość układu trygonometrycznego. Nierówność Bessela i identyczność Parsewala.
- _ Postać zespolona szeregu Fouriera.

7. Przestrzenie metryczne

- _ Definicja i przykłady przestrzeni metrycznych.
- _ Przestrzeń euklidesowa jako przestrzeń metryczna.
- _ Zbiory otwarte i domknięte.
- _ Domknięcie, wnętrze i brzeg zbioru.
- _ Ciągi zbieżne w przestrzeniach metrycznych. Zbieżność w przestrzeni euklidesowej
- _ Przestrzenie zupełne. Zupełność przestrzeni R_n . Twierdzenie Banacha o kontrakcji.
- _ Zbiory zwarte. Zwartość podzbiorów przestrzeni R_n , twierdzenia: Heinego-Borela i Bolzano-Weierstrassa.
- _ Spójność. Charakteryzacja spójnych podzbiorów prostej.
- _ Granica funkcji. Granica podwójna a granice iterowane.
- _ Ciągłość:
 - ciągłość złożenia i ciągłość funkcji odwrotnej;
 - własności funkcji ciągłych na zbiorach zwartych;
 - ciągłość a spójność, zbiory łukowo spójne, łukowa spójność obszaru w przestrzeni euklidesowej
- _ Przestrzeń funkcji ciągłych określonych na zbiorze zwartym.

8. Całka Riemanna-Stieltjesa

- _ Definicja i podstawowe własności całki Riemanna-Stieltjesa.
- _ Istnienie całki w przypadku całkowania funkcji ciągłej względem funkcji monotonicznej.

Literatura

Podręczniki

- [1] R. Engelking, K. Sieklucki, Wstęp do topologii, PWN, Warszawa 1986.
- [2] G. M. Fichtenholz, Rachunek różniczkowy i całkowy, t. 1, 2 i 3 Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007.
- [3] F. Leja, Funkcje zespolone, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.
- [4] K. Kuratowski, Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje jednej zmiennej, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008.
- [5] H. i J. Musielakowie, Analiza matematyczna, t. I, cz. 1 i 2, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2004 (t. I, cz. 1), 2002 (t. I, cz. 2).
- [6] W. Rudin, Podstawy analizy matematycznej, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2009.
- [7] A. Sołtysiak, Analiza matematyczna, Części I i II, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2009 (cz. I), 2004 (cz. II).

Zbiory zadań

- [1] J. Banaś, S. Wędrychowicz, Zbiór zadań z analizy matematycznej, WNT, Warszawa 2006.
- [2] G. N. Berman, Zbiór zadań z analizy matematycznej, Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice 1999.
- [3] B.P. Demidowicz, Zbiór zadań z analizy matematycznej, t. 2 i 3, Naukowa Książka, Lublin 1993.
- [4] J. Długosz, Funkcje zespolone. Teoria, przykłady, zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2005.
- [5] M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza matematyczna 1, Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2010.
- [6] M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza matematyczna 2, Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2010.
- [7] N. M. Giunter, R. O. Kuzmin, Zbiór zadań z matematyki wyższej, t. II, PWN Warszawa 1959.
- [8] W. J. Kaczor, M. T. Nowak, Zadania z analizy matematycznej, t. 2 i 3, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005 (t. 2) i 2006 (t. 3).
- [9] W. Krywicki, L. Włodarski, Analiza matematyczna w zadaniach, t. 1 i 2, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008.
- [10] J. Krzyż, Zbiór zadań z funkcji analitycznych, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
- [11] J. Rutkowski, Zadania z funkcji analitycznych, UAM, Poznań 1999.