

Rozdział 1

Funkcje gładkie i pola wektorowe w $\mathbb{R}^m$

1.1 Funkcje gładkie o zwartym nośniku

W Tomie I, Części 2 i w Tomie II, Części 1 zajmowaliśmy się funkcjami i odwzorowaniami różniczkowalnymi, bądź też n -krotnie różniczkowalnymi w zbiorze otwartym w $\mathbb{R}^m$. Obecnie będzie celowe rozpatrzeć klasy funkcji i odwzorowań mających pochodne wszystkich rzędów w pewnym zbiorze niepustym otwartym U w $\mathbb{R}^m$. Niech $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją. Wiemy (I, Część 2, Twierdzenie 8.21), że jeżeli wskaźniki i_j spełniają nierówności $1 \leq i_j \leq m$ dla $j = 1, 2, \dots, n$ oraz $x \in U$, to pochodna cząstkowa $\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_{j_n}} \partial x_{i_{j_{n-1}}} \dots \partial x_{i_{j_1}}}(x)$ nie zależy od permutacji $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ wskaźników $(1, 2, \dots, n)$, dla dowolnej liczby naturalnej n . To też bez popadnięcia w sprzeczność możemy przyjąć następujące oznaczenia. Niech $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ będzie wielowskaźnikiem (II, Część 1, Uwaga 1.6), gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ są dowolnymi liczbami całkowitymi nieujemnymi. Oznaczmy $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$ - liczbę $|\alpha|$ nazywamy *długością wskaźnika* α . Wielowskaźnikowi α odpowiada pochodna rzędu α funkcji f w punkcie $x \in U$ postaci $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}(x)$. Pochodną tą oznaczamy symbolem $\partial^\alpha f(x)$ lub $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_\alpha}(x)$, czyli

$$\partial^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}(x).$$

Niech U będzie niepustym zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^m$ i niech $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem U w $\mathbb{R}^n$. Wtedy f można zapisać w postaci $f =$

$(f_1, f_2, \dots, f_n)$, gdzie $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ (II, Część 1, wprowadzenie do Twierdzenia 1.3) według zasady $f(x) = y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, gdzie $y_i = f_i(x)$ dla $x \in U$ oraz $i = 1, 2, \dots, n$. Funkcje $f_1, f_2, \dots, f_n$ nazywamy współrzędnymi odwzorowania f . Wiemy, (II, Część 1, Twierdzenie 1.3), że odwzorowanie f jest różniczkowalne w U wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego współrzędne f_i są różniczkowalne w U .

Definicja 1.1 Niech U będzie niepustym zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^m$.

- (a) Funkcję $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *gładką*, gdy w każdym punkcie $x \in U$ ma pochodne cząstkowe wszystkich rzędów α .
- (b) Odwzorowanie $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazywamy *gładkim*, gdy wszystkie jego funkcje współrzędne są gładkie.
- (c) Jeżeli odwzorowanie gładkie $f : U_1 \rightarrow U_2$ jest bijekcją U_1 na U_2 (por. I, Część 1, §1) i odwzorowanie odwrotne do niej $f^{-1} : U_2 \rightarrow U_1$ jest też gładkie, to f nazywamy *C^∞ -dyfeomorfizmem* lub krócej - *dyfeomorfizmem* U_1 na U_2 (por. też II, Część 1, Definicja 1.13, gdzie rozpatrywaliśmy C^1 -dyfeomorfizm).

Zauważmy, że z gładkości funkcji czy też odwzorowania wynika, że jest ciągła wraz z wszystkimi swoimi pochodnymi. Stąd, jeśli f jest dyfeomorfizmem U na U , to jest też homeomorfizmem U na U (por. II, Część 1, Definicja 1.12).

Zbiór wszystkich funkcji gładkich $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ oznaczamy symbolem $C^\infty(U)$. Jeżeli $U = \mathbb{R}^m$, to symbol ten przyjmie postać $C^\infty(\mathbb{R}^m)$.

Definicja 1.2 *Nośnikiem funkcji* ciągłej $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy domknięcie zbioru tych $x \in \mathbb{R}^m$, dla których $f(x) \neq 0$.

Nośnik funkcji $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ oznaczamy symbolem $\text{supp } f$. Zatem

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^m : f(x) \neq 0\}}.$$

Zamiast terminu "nośnik" używa też się nazwy "suport".

Zbiór wszystkich funkcji $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, których nośnik jest zbiorem zwartym, oznaczamy $C_o^\infty(\mathbb{R}^m)$.

Przykład 1.1 (a) Jeżeli $R > 0$ jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, to suma tego szeregu $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest gładka w przedziale $(-R, R)$, czyli $f \in C^\infty((-R, R))$.

(b) Funkcja $f(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}$ dla $x \neq 0$ i $f(0) = 0$ ma pochodne wszystkich rzędów dla każdego $x \in \mathbb{R}$, przy czym $f^{(n)}(0) = 0$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$ (I, Część 2, Przykład 8.5), należy więc do $C^\infty(\mathbb{R})$, ale nie jest sumą żadnego szeregu potęgowego postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Nośnikiem funkcji f jest $\mathbb{R}$.

(c) Rozpatrzmy funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, określoną jak następuje

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x \geq 0. \end{cases}$$

Jest widoczne, że funkcja ta ma pochodne wszystkich rzędów dla dowolnego $x \neq 0$, a w punkcie $x = 0$ ma pochodne prawostronne $f_+^{(n)}(0) = 0$ dla każdego n . Aby przekonać się, że jest gładka w $\mathbb{R}$ wystarczy udowodnić, że ma też wszystkie pochodne lewostronne w punkcie $x = 0$ i że są one równe 0. Mamy dla $x < 0$:

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}, \quad f'(x) = \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}, \quad f''(x) = \frac{2x+1}{x^4} e^{\frac{1}{x}}.$$

Przypuśćmy, że pochodna $f^{(n)}$ wyraża się dla $x < 0$ wzorem

$$f^{(n)}(x) = \frac{w_n(x)}{x^{2n}} e^{\frac{1}{x}}, \quad (1.1)$$

gdzie w_n wielomianem. Wzór ten jest prawdziwy dla $n = 1, 2$. Przypuśćmy, że jest prawdziwy dla rzędu n . Wykażemy, że jest wówczas prawdziwy także dla $n + 1$. Jak Czytelnik zechce sprawdzić (Zad. 4.7(a)), mamy dla $x < 0$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{x^2 w_n'(x) - (1 + 2nx)}{x^{2(n+1)}} e^{\frac{1}{x}},$$

więc

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{w_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}} e^{\frac{1}{x}},$$

gdzie $w_{n+1}(x) = x^2 w_n'(x) - (1 + 2nx)$. Z zasady indukcji zupełnej wynika więc, że (1.1) zachodzi dla każdego $x < 0$ i $n = 0, 1, 2, \dots$. Zatem

$$f_-^{(n+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f^{(n)}(x)}{x} = 0$$

a ponieważ, jak Czytelnik zechce sprawdzić, (Zad. 4.7(b)) prawa strona powyżej równości dąży do zera przy $x \rightarrow 0^-$, więc $f_-^{(n+1)}(0)$ istnieje i

$$f_-^{(n+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f^{(n)}(x)}{x} = 0$$

dla $n = 0, 1, 2, \dots$. Wykazaliśmy, że funkcja f ma pochodne wszystkich rzędów dla każdego $x \in \mathbb{R}$, czyli $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Zauważmy, że nośnikiem funkcji f jest półprosta $\mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)$, Czytelnik łatwo zauważy stąd, że funkcja f nie jest sumą żadnego wyrazu szeregu potęgowego postaci $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ (Zad. 4.7 (c)).

(d) Przy dowolnym $\varepsilon > 0$ określmy w $\mathbb{R}^m$ funkcję ψ_ε następująco

$$\psi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{k}{\varepsilon^m} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}} & \text{gdy } |x| < \varepsilon \\ 0 & \text{gdy } |x| \geq \varepsilon \end{cases},$$

gdzie dla $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ przyjmujemy $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2)^{\frac{1}{2}}$, a k jest liczbę dodatnią tak dobraną, by $\int_{\mathbb{R}^m} \psi_\varepsilon(x) dx = 1$ (przy $m = 1$, patrz Rys. 4.1). Czytelnik łatwo zauważy, że zachodzi równość

$$\psi_\varepsilon(x) = \frac{k}{\varepsilon^m} f\left(\frac{|x|^2}{\varepsilon^2} - 1\right)$$

dla $x \in \mathbb{R}^m$, gdzie f jest funkcją z Przykładu 1.1 (c). Funkcja

$$\frac{|x|^2}{\varepsilon^2} - 1 = \frac{1}{\varepsilon^2}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2) - 1$$

należy do $C^\infty(\mathbb{R}^m)$, a funkcja f należy do $C^\infty(\mathbb{R})$. Na podstawie twierdzenia o pochodnej odwzorowania złożonego (II, Część 1, Twierdzenie 1.10), zastosowanego do pochodnych wyższych rzędów, funkcja złożona ψ_ε należy do $C^\infty(\mathbb{R}^m)$, a jej nośnik $\text{supp } \psi_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \leq \varepsilon\}$ jest kulą domkniętą w $\mathbb{R}^m$ o środku w początku układu współrzędnych i o promieniu ε , więc jest zbiorem zwartym. Zatem $\psi_\varepsilon \in C_o^\infty(\mathbb{R}^m)$. Stąd wynika (por. Przykład 1.1(c)), że $\psi_\varepsilon(x)$ nie jest sumą żadnego szeregu potęgowego postaci $\sum_{n=0}^\infty a_n (|x|^{\frac{1}{2}})^n$. Zauważmy jeszcze, że zachodzi równość $\psi_\varepsilon(x) = \psi_\varepsilon(|x|)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^m$.

1.2 Rozkład jedyński za pomocą funkcji gładkich

W dalszym ciągu potrzebny nam będzie następujący lemat, dotyczący podzbiorów zwartych zbioru otwartego w przestrzeni metrycznej $\langle X, \rho \rangle$.

Lemat 1.1 *Niech $U \subset X$ będzie zbiorem otwartym w przestrzeni metrycznej $\langle X, \rho \rangle$ i niech K będzie dowolnym niepustym podzbiorem zwartym zbioru U . Wówczas istnieje taki zbiór otwarty i ograniczony V w X , że $K \subset V \subset \bar{V} \subset U$, gdzie $\bar{V}$ oznacza domknięcie zbioru V .*

Dowód.

1^o Przypuśćmy, że $U' = X \setminus U = \emptyset$, czyli $U = X$. Niech $V = \{x \in X \text{ i } \rho(x, y) < 1 \text{ dla pewnego } y \in K\}$. Jak Czytelnik łatwo sprawdzi, zbiór V jest otwarty i ograniczony, gdyż zbiór K jest ograniczony, jako zwarty (Zad. 4.9). Ponadto $K \subset V$. Zatem zbiór V spełnia warunki tezy Lematu 1.1.

2^o Przypuśćmy, że $U' = X \setminus U \neq \emptyset$ i niech $d = \inf\{\rho(x, y) : x \in K, y \in U'\}$ będzie odległością zbiorów K i U' . Zauważmy wpierw, że $d > 0$, bo w przeciwnym przypadku istniałyby ciągi (x_n) i (y_n) , gdzie $x_n \in K$ i $y_n \in U'$ przy $n = 1, 2, \dots$ takie, że $\rho(x_n, y_n) \rightarrow 0$ przy $n \rightarrow \infty$. Na podstawie zwartości zbioru K ciąg (x_n) zawierałby podciąg (x_{n_k}) , zbieżny do pewnego elementu $x \in K$. Ponieważ także $\rho(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow 0$ przy $k \rightarrow \infty$, więc ciąg (y_{n_k}) dążyłby także do x . Jednak $y_{n_k} \in U'$ i U' jest zbiorem domkniętym, zatem byłoby $x \in U'$. Stąd $K \cap U' \neq \emptyset$ wbrew temu, że $K \subset U$. Wykazaliśmy, że $d > 0$.

Pokryjmy teraz zbiór K rodziną wszystkich kul otwartych o środkach w punktach zbioru K i o promieniach $\frac{1}{2}d$. Na podstawie twierdzenia Borela o pokryciu zbioru zwartego (I, Część 1, Twierdzenie 4.16), pokrycie to zawiera skończone podpokrycie zbioru K . Istnieją więc kule $K_1, K_2, \dots, K_r$ o środkach w punktach zbioru K i o promieniach $\frac{1}{2}d$ takie, że $K \subset K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_r$. Oznaczmy $V = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_r$, wtedy V jest zbiorem otwartym takim, że $K \subset V$. Wykażemy nie wprost, że $\bar{V} \subset U$. Gdyby było przeciwnie, to istniałby punkt $x_o \in \bar{V}$ taki, że $x_o \in U'$. Jak Czytelnik łatwo sprawdzi (Zad. 4.10), zachodzi

$$\bar{V} = \overline{K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_r} = \bar{K}_1 \cup \bar{K}_2 \cup \dots \cup \bar{K}_r. \quad (1.2)$$

więc $x_o \in \bar{K}_1 \cup \bar{K}_2 \cup \dots \cup \bar{K}_r$. Stąd $x_o \in \bar{K}_j$ przy pewnym j . Niech $\bar{x}_j$ będzie środkiem kuli K_j . Ponieważ $x_o \in U'$, więc $d \leq \rho(\bar{x}_j, x_o) \leq \frac{1}{2}d$. Otrzymaliśmy sprzeczność. Zatem zachodzi zawieranie $\bar{V} \subset U$. ■

Zajmiemy się obecnie splotem funkcji ψ_ε z Przykładu 1.1(d) z funkcją charakterystyczną χ_V zbioru ograniczonego i otwartego V w $\mathbb{R}^m$, określonego wzorem

$$\varphi_\varepsilon(x) = (\chi_V * \psi_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_V(t) \psi_\varepsilon(x - t) dt \quad (1.3)$$

dla $x \in \mathbb{R}^m$ (por. II, Część 3, Definicja 9.5). Przy pomocy tej operacji konstruujemy gładki odpowiednik funkcji charakterystycznej zbioru zwartego K , zawartego w V .

Twierdzenie 1.1 (o regularyzacji funkcji charakterystycznej) *Niech K będzie zbiorem niepustym, zwartym, zawartym zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^m$. Wtedy istnieje funkcja gładka φ posiadająca następujące własności:*

- 1^o $\varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^m)$,
- 2^o $\text{supp } \varphi \subset U$,
- 3^o $\varphi(x) = 1$ dla $x \in K$,
- 4^o $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^m$.

Dowód. Zauważmy wpraw, że zgodnie z Lematem 1.1 dla każdej pary zbiorów K i U w $\mathbb{R}^m$, jeżeli K jest zwarty i U jest otwarty, to istnieje zbiór ograniczony i otwarty V taki, że $K \subset V \subset \bar{V} \subset U$. Wykażemy, że funkcję φ można określić wzorem (1.3) przy dostatecznie małym ε . Na podstawie definicji funkcji χ_V mamy $\varphi(x) = \varphi_\varepsilon(x) = \int_V \psi_\varepsilon(x-t)dt$. Ponieważ $\psi_\varepsilon \in C_o^\infty(\mathbb{R}^m)$ i zbiór V jest ograniczony, więc rozumując podobnie jak w dowodzie o różniczkowaniu całki właściwej zależnej od parametru (I, Część 2, Twierdzenie 11.7) można wywnioskować, że $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ (Zad. 4.11).

Wykażemy obecnie 2^o. Zastosujemy Lemat 1.1 do zbioru $\bar{V}$ w miejsce K . Istnieje więc zbiór ograniczony i otwarty W taki, że $\bar{V} \subset W \subset \bar{W} \subset U$. Rozumując jak w dowodzie Lematu 1.1, gdzie K zastąpiono przez $\bar{V}$, a U przez W otrzymujemy, że $d_o = \inf\{|x-y| : x \in \bar{V}, y \in W'\} > 0$. Obierzmy dowolną liczbę ε taką, że $0 < \varepsilon < d_o$, wtedy dla każdego $x \in W'$ mamy $\rho(\bar{V}, x) = \inf\{|x-t| : t \in \bar{V}\} \geq d_o > \varepsilon$. Stąd, jeżeli $t \in V$, to $|x-t| > \varepsilon$ i w konsekwencji $\psi_\varepsilon(x-t) = 0$. Zatem $\varphi_\varepsilon(x) = \int_V \psi_\varepsilon(x-t)dt = 0$ dla $x \in W'$, więc $\text{supp } \varphi_\varepsilon \subset \bar{W}$ ($\bar{W}$ - domknięcie W). Ponieważ $\bar{W} \subset U$, więc $\text{supp } \varphi_\varepsilon \subset U$, co kończy dowód 2^o. Ponadto, $\text{supp } \varphi_\varepsilon$ jest zbiorem zwartym jako domknięty podzbiór zbioru zwartego $\bar{W}$.

Aby wykazać 3^o zauważmy, że ponieważ $K \subset V$, więc przyjmując $d_1 = \inf\{|x-y| : x \in K, y \in V'\}$, mamy $d_1 > 0$. Obierzmy ε tak, by $0 < \varepsilon < d_1$ i niech $x \in K$ oraz $t \in V'$. Wtedy $|x-t| \geq d_1 > \varepsilon$. Skoro więc $t \in V'$ pociąga $|x-t| > \varepsilon$, to $|x-t| < \varepsilon$ pociąga $t \in V$, czyli warunek $\psi_\varepsilon(x-t) > 0$ pociąga $t \in V$. Zatem dla $x \in K$ mamy

$$\varphi_\varepsilon(x) = \int_V \psi_\varepsilon(x-t)dt = \int_{\mathbb{R}^m} \psi_\varepsilon(x-t)dt = \int_{\mathbb{R}^m} \psi_\varepsilon(u)du = 1,$$

na podstawie definicji funkcji ψ_ε . To dowodzi warunku 3^o.

Warunek 4^o wynika z nierówności

$$0 \leq \varphi_\varepsilon(x) = \int_V \psi_\varepsilon(x-t)dt \leq \int_{\mathbb{R}^m} \psi_\varepsilon(x-t)dt = 1. \quad \blacksquare$$

W dalszym ciągu potrzebne nam będą pewne pojęcia dotyczące przestrzeni metrycznych $\langle X, \rho \rangle$ i ich podprzestrzeni oraz pokrycia zbioru, w przypadku gdy $X = \mathbb{R}^m$ omówione w I, Części 1 i II, Części 1.

Uwaga 1.1 (a) Niech A będzie niepustym podzbiorem przestrzeni metrycznej $\langle X, \rho \rangle$. Jeżeli $x_o \in A$, to *otoczeniem punktu x_o w A* nazywamy każdy zbiór postaci $A \cap \tilde{U}$, gdzie $\tilde{U} \subset X$ jest zbiorem otwartym w X , zawierającym x_o (II, Część 1, Definicja 1.14). Podzbiór $U \subset A$ nazywamy *otwartym podzbiorem zbioru A* , gdy jest postaci $U = A \cap \tilde{U}$, gdzie $\tilde{U} \subset X$ jest zbiorem otwartym w X (II, Część 1, Definicja 1.15). Rodzina $\mathcal{R}$ wszystkich podzbiorów otwartych zbioru A spełnia następujące warunki:

1° dla dowolnej niepustej podrodziny $\mathcal{R}_o$ rodziny $\mathcal{R}$ zachodzi $\bigcup_{G \in \mathcal{R}_o} G \in \mathcal{R}$,

2° jeżeli $G_1, G_2, \dots, G_n \in \mathcal{R}$, to $G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_n \in \mathcal{R}$,

3° $\emptyset \in \mathcal{R}$ i $A \in \mathcal{R}$ (por. I, Część 1, Twierdzenie 4.9).

Zbiór A z odległością ρ stanowi przestrzeń metryczną $\langle A, \rho \rangle$ - podprzestrzeń przestrzeni $\langle X, \rho \rangle$, zwaną *podprzestrzenią metryczną indukowaną przez ρ* .

(b) Przypomnijmy (I, Część 1, Definicja 4.10), że przestrzenią metryczną $\langle X, \rho \rangle$ nazywamy *przestrzenią ośrodkową*, gdy istnieje w niej zbiór Z co najwyżej przeliczalny i gęsty w $\langle X, \rho \rangle$. Zbiór Z nazywamy *ośrodkiem* przestrzeni $\langle X, \rho \rangle$. Przykładem przestrzeni metrycznej ośrodkowej jest przestrzeń m -wymiarowa rzeczywista $\mathbb{R}^m$ wektorów $x = (t_1, t_2, \dots, t_m)$, $y = (s_1, s_2, \dots, s_m)$, $t_j, s_j \in \mathbb{R}$ z odległością $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^m (t_j - s_j)^2}$ (I, część 1, Definicja 4.1). Przypomnijmy, że zbiór A zwarty w przestrzeni metrycznej $\langle X, \rho \rangle$ jest domknięty i ograniczony w $\langle X, \rho \rangle$ (I, Część 1, Twierdzenie 4.12). W przypadku gdy $X = \mathbb{R}^m$, zbiór $A \subset \mathbb{R}^m$ jest zwarty w $\mathbb{R}^m$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony w $\mathbb{R}^m$ (I, Część 1, Wniosek 4.2).

(c) Rodzinę $\mathcal{P}$ zbiorów otwartych w przestrzeni metrycznej $\langle X, \rho \rangle$ nazywamy *pokryciem zbioru $A \subset X$* , gdy $A \subset \bigcup_{G \in \mathcal{P}} G$ (I, Część 1, Definicja 4.13). Jeżeli $\langle X, \rho \rangle$, jest przestrzenią metryczną ośrodkową i $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, to każde pokrycie $\mathcal{P}$ zbioru A zawiera podpokrycie co najwyżej przeliczalne (I, Część 1, Twierdzenie 4.15). Twierdzenie Borela o pokryciu zbioru zwartego orzeka, że każde pokrycie zbioru zwartego A w przestrzeni metrycznej $\langle X, \rho \rangle$ zawiera podpokrycie skończone zbioru A .

Wszystkie przestrzenie metryczne, którymi będziemy się zajmować będą lokalnie zwarte. Przypomnimy teraz określenie takich przestrzeni.

Definicja 1.3 Przestrzeń metryczną $\langle X, \rho \rangle$ nazywamy *lokalnie zwartą* jeśli dla każdego punktu $x \in X$ istnieje $r > 0$ takie, że kula domknięta

$$\overline{K(x, r)} = \{y \in X : \rho(x, y) \leq r\}$$

jest zbiorem zwartym.

Przykład 1.2 (a) Każda przestrzeń metryczna zwarta jest lokalnie zwarta.

(b) Najprostszym przykładem przestrzeni niezwartej, lokalnie zwartej jest $\mathbb{R}^m$ z metryką euklidesową. Lokalna zwartość wynika natychmiast z faktu, że każda kula domknięta jest zwarta.

(c) Jeżeli zbiór otwarty, niepusty $U \subset \mathbb{R}^m$ wyposażymy w metrykę ρ indukowaną przez metrykę euklidesową to otrzymamy przestrzeń metryczną lokalnie zwartą. Rzeczywiście, niech x będzie dowolnym elementem U . Z otwartości zbioru U wynika, że dla dostatecznie małego $r > 0$, $\{y \in \mathbb{R}^m : |x - y| < r\} \subset U$. Wtedy kula domknięta

$$\overline{K(x, \frac{r}{2})} = \{y \in U : \rho(x, y) \leq \frac{r}{2}\} = \{y \in \mathbb{R}^m : |x - y| \leq \frac{r}{2}\}$$

jest zbiorem zwartym zawartym w U . Zauważmy, że jeżeli promień kuli domkniętej jest większy od odległości środka kuli od brzegu zbioru U to taka kula domknięta nie jest zwarta w U .

Wprowadzimy obecnie dalsze określenia, odnoszące się do pojęcia pokrycia zbioru.

Definicja 1.4 Pokrycie $\mathcal{P}$ zbioru E w przestrzeni metrycznej $\langle X, \rho \rangle$ nazywamy *lokalnie skończonym*, gdy każdy zwarty podzbiór zbioru E ma punkty wspólne tylko ze skończoną liczbą zbiorów $U \in \mathcal{P}$.

Uwaga 1.2 Można pokazać, że jeżeli przestrzeń metryczna jest lokalnie zwarta to pokrycie $\mathcal{P}$ zbioru E w tej przestrzeni jest lokalnie skończone wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego punktu $x \in E$ istnieje jego otoczenie otwarte, które przecina tylko skończenie wiele elementów pokrycia $\mathcal{P}$ (Zadanie 4.27).

Okazuje się, że gdy przestrzeń metryczna jest lokalnie zwarta to dowolne pokrycie można zastąpić zawsze lokalnie skończonym. Mówiąc dokładniej, zachodzi następujący lemat:

Lemat 1.2 *Niech $\langle X, \rho \rangle$ będzie przestrzenią metryczną ośrodkową i lokalnie zwartą. Niech $\mathcal{P} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ będzie dowolnym pokryciem przestrzeni metrycznej $\langle X, \rho \rangle$. Wówczas*

(a) *istnieje lokalnie skończone, co najwyżej przeliczalne pokrycie $\mathcal{P}_1 = \{Z_i\}_{i \in I}$ zbioru X zbiorami Z_i takie, że każdy ze zbiorów $\overline{Z_i}$ jest zwarty i zawarty w pewnym zbiorze $U_\alpha \in \mathcal{P}$,*

(b) *istnieje lokalnie skończone, co najwyżej przeliczalne pokrycie $\mathcal{P}_2 = \{G_i\}_{i \in I}$ zbioru U , takie, że $\overline{G_i} \subset Z_i$ dla każdego $i \in I$.*

Dowód(*). (a) Każdemu punktowi $x \in U$ przyporządkowujemy kulę o środku w x i o promieniu tak małym, by jej domknięcie było zbiorem zwartym i leżało w zbiorze U_α przy pewnym $\alpha \in A$. Taka kula istnieje na mocy lokalnej zwartości przestrzeni $\langle X, \rho \rangle$. Rodzina tych kul tworzy pokrycie zbioru X . Przestrzeń metryczna $\langle X, \rho \rangle$ jest ośrodkowa, więc wyżej określone pokrycie zbioru X kulami zawiera podpokrycie przeliczalne (I, Część 1, Twierdzenie 4.15), które oznaczmy $\{V_i\}_{i=1}^\infty$. Wprost z określenia kul V_i wynika, że $\overline{V_i} \subset U_\alpha$ dla pewnego $\alpha \in A$. Przy pomocy zbiorów V_i określimy obecnie indukcyjnie ciąg zbiorów zwartych (W_m) oraz rosnący ciąg wskaźników (j_m) . Oznaczając przez $\overline{V_i}$ domknięcie kuli V_i , przyjmujemy:

$$j_1 = 1, \quad W_1 = \overline{V_1}.$$

Jeżeli $W_1 \neq X$ to przyjmujemy

$$j_2 = \text{najmniejsza liczba naturalna większa od } j_1 \text{ i taka, że } W_1 \subset \bigcup_{i=1}^{j_2} V_i,$$

$$W_2 = \bigcup_{i=1}^{j_2} \overline{V_i}.$$

Zauważmy, że taka liczba j_2 istnieje, bo zbiór W_1 jest zwarty i $\{V_i\}_{i=1}^\infty$ jest jego pokryciem (bo jest pokryciem X i $W_1 \subset X$), a zatem pokrycie $\{V_i\}_{i=1}^\infty$ zawiera, na podstawie twierdzenia Borela (I, Część 1, Twierdzenie 4.16), podpokrycie skończone zbioru W_1 . Zwartość jest również zbiór W_2 jako suma skończonej ilości zbiorów zwartych.

Przypuśćmy obecnie, że zbiór W_{m-1} i wskaźnik j_{m-1} są już zdefiniowane tak, że $j_1 < j_2 < \dots < j_{m-1}$ oraz $W_i = \bigcup_{j=1}^{j_i} \overline{V_j}$. Jeżeli $W_{m-1} \neq X$ to

określamy wskaźnik j_m i zbiór W_m następująco:

$$\begin{aligned} j_m &= \text{najmniejsza liczba naturalna większa od } j_{m-1} \text{ i taka, że} \\ W_{m-1} &\subset \bigcup_{i=1}^{j_{m-1}} V_i, \\ W_m &= \bigcup_{i=1}^{j_m} \overline{V}_i. \end{aligned}$$

Istnienie wskaźnika j_m o tej własności wykazuje się podobnie jak wyżej istnienie j_2 . Postępując indukcyjnie otrzymujemy skończony, jeśli $W_k = X$ dla pewnego k , lub nieskończony ciąg zbiorów. Każdy zbiór W_m jest zwarty i leży we wnętrzu zbioru W_{m+1} oraz każdy zbiór zwarty w X jest zawarty w pewnym zbiorze W_m .

Obecnie określimy pokrycie lokalnie skończone $\mathcal{P}_1 = \{Z_i\}_i$. Niech $W'_j = X \setminus W_j$, $j = 1, 2, \dots$. Oznaczmy

$$Z_i = \begin{cases} V_i & \text{gdy } i \leq j_2, \\ V_i \cap W'_{m-1} & \text{gdy } j_m < i \leq j_{m+1}, \text{ gdzie } m > 1. \end{cases}$$

Zbiory Z_i są otwarte a ich domknięcia $\overline{Z}_i$ są zwarte jako domknięte pozbiory zbiorów zwartych $\overline{V}_i$. Wykażemy indukcyjnie, że

$$\bigcup_{i=1}^{j_m} Z_i = \bigcup_{i=1}^{j_m} V_i \text{ dla } m = 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

Dla $m = 1$ i $m = 2$ jest to prawdziwe na podstawie definicji Z_i przy $i \leq j_2$. Przypuścimy, że równość (1.4) jest prawdziwa dla j_m i oznaczmy

$$A = \bigcup_{i=1}^{j_m} Z_i = \bigcup_{i=1}^{j_m} V_i.$$

Na podstawie definicji wskaźnika j_m mamy $W_{m-1} \subset A$, więc dla $j_m < i \leq j_{m+1}$ mamy

$$Z_i \cup A = (V_i \cup A) \cap (W'_{m-1} \cup A) = (V_i \cup A) \cap A = V_i \cup A,$$

a stąd

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{j_{m+1}} Z_i &= A \cup \bigcup_{i=j_m+1}^{j_{m+1}} Z_i = \bigcup_{i=j_m+1}^{j_{m+1}} (Z_i \cup A) = \bigcup_{i=j_m+1}^{j_{m+1}} (V_i \cup A) = \\ &= A \cup \bigcup_{i=j_m+1}^{j_{m+1}} V_i = \bigcup_{i=1}^{j_{m+1}} V_i. \end{aligned}$$

Na podstawie zasady indukcji matematycznej, równość (1.4) jest prawdziwa dla $m = 0, 1, 2, \dots$

Ponieważ $\{V_i\}$ jest pokryciem zbioru X , więc $\{\bigcup_{i=1}^{j_{m+1}} V_i\}$ jest też pokryciem X , a stąd $\{Z_i\}$ jest także pokryciem X . Co więcej, ponieważ $Z_i \subset V_i$ oraz $\overline{V_i} \subset U\alpha$ dla pewnego $\alpha \in A$, więc $\overline{Z_i} \subset U\alpha$.

Aby dokończyć dowód części (a) Lematu 1.2 wystarczy wykazać, że pokrycie $\mathcal{P}_1$ jest lokalnie skończone, czyli że dla każdego zbioru zwartego $A \subset X$, zbiór A ma punkty wspólne tylko ze skończoną liczbą zbiorów Z_i . Jak widzieliśmy wyżej, każdy zbiór zwarty $A \subset X$ jest zawarty w pewnym zbiorze W_k , a ponieważ $W_1 \subset W_2 \subset \dots$ więc istnieje taki wskaźnik m , że $A \subset W_k$ dla wszystkich $k \geq m$. Stąd dla $k \geq m$ mamy, przy $j_{k+1} < i \leq j_{k+2}$,

$$A \cap Z_i = A \cap (V_i \cap W'_k) = V_i \cap (A \cap W'_k) = V_i \cap \emptyset = \emptyset.$$

Wykazaliśmy, że A ma punkty wspólne tylko ze skończoną liczbą zbiorów Z_i , co kończy dowód części (a) Lematu 1.2.

(b) Wpiszemy obecnie w pokrycie $\mathcal{P}_1 = \{Z_i\}_{i \in I}$ zbioru X , pokrycie $\mathcal{P}_2 = \{G_i\}_{i \in I}$ zbioru X takie, że domknięcie $\overline{G_i}$ zbioru otwartego G_i spełnia warunek $\overline{G_i} \subset Z_i$ dla każdego $i \in I$. Oczywiście pokrycie $\mathcal{P}_2$ zbioru X będzie wtedy również lokalnie skończone i każdy z elementów tego pokrycia będzie zawierał się w pewnym elemencie pokrycia $\mathcal{P}$.

Pokrycie $\mathcal{P}_2$ określimy indukcyjnie. Założymy wpierw, że pokrycie $\mathcal{P}_1$ jest nieskończone. W pierwszym kroku pokażemy, że istnieje taki zbiór otwarty G_1 , iż ciąg zbiorów $G_1, Z_2, Z_3, \dots$ jest pokryciem zbioru X oraz $\overline{G_1} \subset Z_1$. Oznaczmy

$$A_1 = Z_1 \setminus \bigcup_{j=2}^{\infty} Z_j$$

i niech $\overline{Z_1}$ oznacza domknięcie zbioru Z_1 . Ale $\mathcal{P}_1 = \{Z_i\}$ jest pokryciem zbioru X , czyli $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i = Z_1 \cup \bigcup_{i=2}^{\infty} Z_i$. Zatem $\overline{Z_1} \subset Z_1 \cup \bigcup_{j=2}^{\infty} Z_j$, czyli $\overline{Z_1} \setminus Z_1 \subset \bigcup_{j=2}^{\infty} Z_j$. Stąd $(\overline{Z_1} \setminus Z_1) \setminus \bigcup_{j=2}^{\infty} Z_j = \emptyset$, a zatem

$$\begin{aligned} \overline{Z_1} \setminus \bigcup_{j=2}^{\infty} Z_j &= [(\overline{Z_1} \setminus Z_1) \cup Z_1] \setminus \bigcup_{j=2}^{\infty} Z_j = \\ &= [(\overline{Z_1} \setminus Z_1) \setminus \bigcup_{j=2}^{\infty} Z_j] \cup (Z_1 \setminus \bigcup_{j=2}^{\infty} Z_j) = Z_1 \setminus \bigcup_{j=2}^{\infty} Z_j = A_1. \end{aligned}$$

Ponieważ zbiór $\overline{Z_1}$ jest domknięty, a zbiór $\bigcup_{j=2}^{\infty} Z_j$ jest otwarty, więc z powyższych równości wynika, że zbiór A_1 jest domknięty. Co więcej, mamy $A_1 \subset Z_1 \subset \overline{Z_1}$ oraz $\overline{Z_1}$ jest zbiorem zwartym. Zatem zbiór A_1 jako

domknięty podzbiór zbioru zwartego jest zwarty, a ponadto $A_1 \subset Z_1$, Z_1 jest otwarty. Na podstawie Lematu 1.1 wnioskujemy, że istnieje taki zbiór otwarty G_1 , że $A_1 \subset G_1 \subset \overline{G}_1 \subset Z_1$. Z określenia zbioru A_1 i z tego, że $\mathcal{P}_1 = \{Z_i\}$ jest pokryciem zbioru X wnioskujemy, że $\{A_1, Z_2, Z_3, \dots\}$ jest też pokryciem zbioru X , a ponieważ $A_1 \subset G_1$, więc $\{G_1, Z_2, Z_3, \dots\}$ jest również pokryciem X . Przypuśćmy teraz, że zbiory otwarte G_i są już określone dla $i < k$ (gdzie $k > 1$) w taki sposób, że $\{G_1, G_2, \dots, G_{k-1}, Z_k, Z_{k+1}, \dots\}$ jest pokryciem zbioru X oraz $\overline{G}_i \subset Z_i$ dla $i = 1, 2, \dots, k-1$. Oznaczmy

$$B_k = \bigcup_{i < k} G_i \cup \bigcup_{j > k} Z_j$$

i

$$A_k = Z_k \setminus B_k,$$

wtedy mamy $A_k \subset Z_k$. Ponadto z założenia, że

$$\{G_1, G_2, \dots, G_{k-1}, Z_k, Z_{k+1}, \dots\}$$

jest pokryciem zbioru X wynika, że $\overline{Z}_k \setminus Z_k \subset B_k$, bo $\overline{Z}_k \subset X$. Stąd

$$\overline{Z}_k \setminus B_k = [(\overline{Z}_k \setminus Z_k) \setminus B_k] \cup (Z_k \setminus B_k) = Z_k \setminus B_k = A_k,$$

a ponieważ zbiór B_k jest otwarty, więc zbiór A_k jest domknięty. Ponadto $\overline{Z}_k$ jest zwarty, więc z zawierania $A_k \subset Z_k$ wnosimy, że A_k jest zwarty. Na podstawie Lematu 1.1 wnosimy, że istnieje taki zbiór otwarty G_k , że $A_k \subset G_k \subset \overline{G}_k \subset Z_k$. Co więcej, z założenia indukcyjnego i z zawierania $A_k \subset G_k$ oraz z definicji zbioru A_k wynika, że zbiory $G_1, G_2, \dots, G_k, Z_{k+1}, Z_{k+2}, \dots$ stanowią pokrycie zbioru X .

Jeżeli pokrycie $\mathcal{P}_1$ jest skończone, to musimy zmodyfikować ostatni krok konstrukcji. Niech $\mathcal{P}_1 = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_m\}$ i niech zbiory $G_1, \dots, G_{m-1}$ będą skonstruowane tak jak wyżej. Rodzina $G_1, G_2, \dots, G_{m-1}, Z_m$ jest pokryciem zbioru X , więc zbiór

$$A_m = X \setminus \bigcup_{k=1}^{m-1} G_k \subset Z_m \subset \overline{Z}_m$$

jest zwarty. Na podstawie Lematu 1.1 wnosimy, że istnieje taki zbiór otwarty G_m , że $A_m \subset G_m \subset \overline{G}_m \subset Z_m$.

Wykażemy, że rodzina $\mathcal{P}_2 = \{G_i\}_{i \in I}$ stanowi pokrycie zbioru X . W przypadku pokryw skończonych wynika to wprost z definicji ostatniego elementu pokrycia. Dla pokryw nieskończonych przeprowadzimy rozumowanie

nie wprost. Przypuśćmy, że nie jest to prawdą. Wtedy istnieje taki punkt $x \in X$, że $x \notin G_i$ dla $i = 1, 2, \dots$. Ponieważ $G_1, G_2, \dots, G_{k-1}, Z_k, Z_{k+1}, \dots$ jest przy każdym k pokryciem zbioru X , więc $x \in \bigcup_{j>k} Z_j$ dla $k = 1, 2, \dots$. Stąd x należy do nieskończenie wielu spośród zbiorów $Z_1, Z_2, \dots$. Jednak pokrycie $\{Z_j\}$ jest lokalnie skończone, więc każdy zwarty podzbiór A zbioru X przecina tylko nieskończoną liczbę zbiorów Z_i . Biorąc jako A jednoelementowy zbiór $\{x\}$, otrzymujemy sprzeczność. Zatem $\mathcal{P}_2 = \{G_i\}_{i \in I}$ jest pokryciem zbioru X i $\overline{G_i} \subset Z_i$ dla $i = 1, 2, \dots$. Wykazaliśmy więc część (b) Lematu 1.2. ■

Za pomocą Lematu 1.2 i Twierdzenia 1.1 wykażemy obecnie następujące twierdzenie o fundamentalnym znaczeniu.

Twierdzenie 1.2 (o rozkładzie jedynek) *Niech $U \subset \mathbb{R}^m$ będzie niepustym zbiorem otwartym i niech $\mathcal{P} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ będzie pokryciem U zbiorami otwartymi U_α . Wówczas istnieją*

(a) *skończone lub przeliczalne, lokalnie skończone pokrycia $\mathcal{P}_1 = \{Z_i\}_{i \in I}$ zbioru U takie, że każdy ze zbiorów $\overline{Z_i}$ jest zwarty i zawarty w pewnym elemencie pokrycia $\mathcal{P}$,*

(b) *skończona lub przeliczalna rodzina funkcji $\varphi_i \in C^\infty(U)$ taka, że*

$$1^\circ \varphi_i \in C_0^\infty(U),$$

$$2^\circ \text{supp } \varphi_i \subset Z_i \subset U_\alpha \text{ dla pewnego } \alpha \in A,$$

$$3^\circ \varphi_i(x) \geq 0 \text{ i } \sum_i \varphi_i(x) = 1 \text{ dla } x \in U,$$

$$4^\circ \text{każdy zbiór zwarty zawarty w } U \text{ przecina tylko skończoną liczbę nośników funkcji } \varphi_i.$$

Dowód. Rozpatrzmy lokalnie zwartą przestrzeń metryczną $X = U$ z metryką ρ indukowaną przez metrykę euklidesową. Rodzina $\tilde{\mathcal{P}} = \{U \cap U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ jest wówczas pokryciem przestrzeni metrycznej $\langle U, \rho \rangle$ zbiorami otwartymi. Na podstawie Lematu 1.2 istnieją lokalnie skończone, co najwyżej przeliczalne pokrycia zbioru U $\mathcal{P}_1 = \{Z_i\}_{i \in I}$ oraz $\mathcal{P}_2 = \{G_i\}_{i \in I}$ takie, że $\overline{G_i} \subset Z_i$ i $\overline{Z_i}$ jest zbiorem zwartym w U dla każdego $i \in I$. Zbiór U jest otwarty w $\mathbb{R}^m$ więc zbiory Z_i i G_i otwarte w U są również otwarte w $\mathbb{R}^m$. Zatem pokrycia $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ są pokryciami zbioru U w $\mathbb{R}^m$ i ich elementy zawierają się w elementach pokrycia $\mathcal{P}$. Ponadto zbiory $\overline{Z_i}$ i $\overline{G_i}$ są zwarte w $\mathbb{R}^m$ gdyż są zwarte w U .

Zastosujemy Twierdzenie 1.1, biorąc w nim Z_i w miejsce U oraz $\overline{G_i}$ w miejsce K . Istnieją więc funkcje $\tilde{\varphi}_i \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ takie, że $\text{supp } \tilde{\varphi}_i \subset Z_i$, $\tilde{\varphi}_i(x) = 1$ dla $x \in G_i$ oraz $0 \leq \tilde{\varphi}_i(x) \leq 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^m$. Ponieważ

zbiory $\overline{Z_i}$ są zwarte, więc ich domknięte podzbiory $\text{supp } \tilde{\varphi}_i$ są zwarte, a zatem $\tilde{\varphi}_i \in C_o^\infty(\mathbb{R}^m)$. Oznaczmy

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_i(x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^m. \quad (1.5)$$

Zauważmy, że suma po prawej stronie równości (1.5) jest zawsze skończona. Aby to wykazać, rozpatrzmy dowolny zbiór niepusty i zwarty $K \subset U$. Ponieważ pokrycie $\mathcal{P}_1 = \{Z_i\}_i$ jest lokalnie skończone, więc K przecina tylko skończoną liczbę zbiorów Z_i , a zatem istnieje taki wskaźnik r , że $K \cap Z_i = \emptyset$ dla $i > r$. Z warunku $\text{supp } \tilde{\varphi}_i \subset Z_i$ wynika więc, że $\sum_{i=r+1}^{\infty} \tilde{\varphi}_i(x) = 0$ dla wszystkich $x \in K$, czyli

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{i=1}^r \tilde{\varphi}_i(x) \quad \text{dla } x \in K.$$

Biorąc $K = \{x\}$ stwierdzamy, że szereg w równości (1.5) jest skończony dla każdego $x \in U$. Gdy $x \notin U$, wtedy $x \in Z'_i = \mathbb{R}^m \setminus Z_i$ dla każdego i więc z warunku $\text{supp } \tilde{\varphi}_i \subset Z_i$ wynika, że $\tilde{\varphi}(x) = 0$. Wykazaliśmy, że suma w równości (1.5) jest zawsze skończona.

Obierzmy dowolny punkt $x_o \in U$. Ponieważ U jest otwarty więc istnieje taka kula domknięta K o środku w punkcie x_o , że $K \subset U$. Zatem $\tilde{\varphi}(x) = \sum_{i=1}^r \tilde{\varphi}_i(x)$ dla $x \in K$, gdzie wskaźnik r nie zależy od x . Ponieważ $\tilde{\varphi}_i \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ i $\text{supp } \tilde{\varphi}_i \subset Z_i \subset U$ więc $\tilde{\varphi}$ jest nieskończenie różniczkowalną funkcją w otoczeniu punktu x_o , jako skończona suma funkcji nieskończenie różniczkowalnych w otoczeniu punktu x_o . Ponadto nośnik funkcji $\tilde{\varphi}$ jest zawarty w U gdyż $\tilde{\varphi}$ jest sumą funkcji o nośnikach w U . Stąd $\tilde{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$.

Weźmy dowolne $x \in U$, wtedy $x \in G_i$ przy pewnym i , więc $\tilde{\varphi}_i(x) = 1$ przy pewnym i . Stąd $\tilde{\varphi}(x) \geq 1$ dla $x \in U$. Oznaczmy

$$\varphi_i(x) = \frac{\tilde{\varphi}_i(x)}{\tilde{\varphi}(x)} \quad \text{dla } x \in U.$$

Mamy $\varphi_i \in C^\infty(U)$, $0 \leq \varphi_i(x) \leq 1$ dla $x \in U$ oraz $\text{supp } \varphi_i \subset Z_i \subset \overline{Z_i} \subset U$ dla $i = 1, 2, \dots$. Ponadto mamy

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{\varphi}_i(x)}{\tilde{\varphi}(x)} = 1 \quad \text{dla } x \in U.$$

Ponieważ każdy ze zbiorów $\overline{Z_i}$ jest zwarty i zawarty w pewnym zbiorze U_α oraz $\text{supp } \varphi_i \subset Z_i$, więc nośnik każdej z funkcji jest zwarty i zawarty w pewnym zbiorze U_α .

Wykazaliśmy punkty 1^o-3^o. Obecnie wykażemy punkt 4^o. Każdy zbiór zwarty $K \subset U$ przecina tylko skończoną liczbę zbiorów Z_i , czyli istnieje taki wskaźnik r zależny tylko od K , że $K \cap Z_i = \emptyset$ dla $i > r$; zatem $K \subset \bigcup_{i=1}^r Z_i$. Niech wskaźniki $j_1, j_2, \dots, j_r$ będą tak dobrane, że $1 \in N_{j_1}, 2 \in N_{j_2}, \dots, r \in N_{j_r}$ i niech $j > \max(j_1, j_2, \dots, j_r)$. Wykażemy nie wprost, że $K \cap \text{supp } \varphi_j = \emptyset$. Przypuśćmy, że istnieje punkt $x_o \in U$ taki, że $x_o \in \bigcup_{i=1}^r Z_i$ oraz $\varphi_j(x_o) \neq 0$, czyli $\psi_K(x_o) \neq 0$ przy pewnym $K \in N_j$. Ponieważ $\text{supp } \psi_K \subset Z_K$, więc $x_o \in Z_K$ przy pewnym $K \in N_j$. Ponieważ $j > \max(j_1, j_2, \dots, j_r)$, więc stąd na podstawie określenia zbioru N_j mamy $Z_K \cap U_{j_s} = \emptyset$ dla $s = 1, 2, \dots, r$. Zatem $x_o \notin U_{j_s}$ dla $s = 1, 2, \dots, r$. Jednak z drugiej strony, $x_o \in \bigcup_{i=1}^r Z_i$ przy pewnym i takim, że $1 \leq i \leq r$. Ponieważ $i \in N_{j_i}$, więc $Z_i \subset U_{j_i}$, a stąd $x_o \in U_{j_i}$ przy pewnym i , spełniającym nierówności $1 \leq i \leq r$. Jest to sprzeczne z poprzednim. Zatem $K \cap \text{supp } \varphi_j = \emptyset$ dla $j > \max(j_1, j_2, \dots, j_r)$, co dowodzi punktu 4^o tezy. ■

Uwaga 1.3 Ciąg funkcji $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, spełniających warunki Twierdzenia 1.2, nazywamy *rozkładem jedynki* lub *rozkładem jedności*.

1.3 Pole wektorowe na zbiorze otwartym w $\mathbb{R}^m$

Jeżeli w przestrzeni $C^\infty(U)$, gdzie U jest niepustym, otwartym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^m$, wprowadzimy w zwykły sposób działania dodawania funkcji i mnożenia funkcji przez liczbę wzorami $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ i $(c\varphi)(x) = c(\varphi(x))$ dla $x \in U$, gdzie $\varphi, \psi \in C^\infty(U)$, $c \in \mathbb{R}$, to Czytelnik łatwo sprawdzi (Zad. 4.18(a)), że $C^\infty(U)$ jest przestrzenią wektorową (liniową), a $C_o^\infty(U)$ jest jej podprzestrzenią (por. I, Część 1, Rozdział IV, § 5). Co więcej, jeżeli mnożenie funkcji określić wzorem $(\varphi\psi)(x) = \varphi(x)\psi(x)$ dla $x \in U$, $\varphi, \psi \in C^\infty(U)$, to także $\varphi\psi \in C^\infty(U)$; jeżeli $\varphi, \psi \in C_o^\infty(U)$, to $\varphi\psi \in C_o^\infty(U)$ (Zad. 4.18(b)). Obydwie przestrzenie, $C^\infty(U)$ i $C_o^\infty(U)$ są szczególnymi przypadkami pierścienia oraz algebry. Ogólnie, zbiór $\mathcal{X}$ z dwoma działaniami $+$ i $\cdot$ nazywamy *pierścieniem*, gdy jest grupą abelową ze względu na działanie $+$ oraz gdy dla działania $\cdot$ zachodzi prawo łączności $(xy)z = x(zy)$ oraz prawa rozdzielności mnożenia z dodawaniem $x(y+z) = xy+xz$ i $(y+z)x = yx+zx$ dla $x, y, z \in \mathcal{X}$. Gdy nadto działanie $\cdot$ jest przemienne, tj. $xy = yx$ dla $x, y \in \mathcal{X}$, to mówimy, że $\mathcal{X}$ jest *pierścieniem przemiennym*. Jeżeli zbiór $\mathcal{X}$ jest równocześnie przestrzenią wektorową i pierścieniem, przy czym zachodzi równość $c(xy) = (cx)y = x(cy)$ dla każdych $x, y \in \mathcal{X}$ i $c \in \mathbb{K}$, gdzie $\mathbb{K}$ jest ciałem skalarów, to $\mathcal{X}$ nazywamy *algebrą*. Jeżeli $\mathcal{X}$ jest przy tym pierścieniem przemiennym, to $\mathcal{X}$ nazywamy

algebrą przemenną. W dalszym ciągu algebrę będziemy oznaczali symbolem $\mathcal{A}$ a pierścień symbolem $\mathbb{P}$. Jak widać, wspomniane wyżej przestrzenie wektorowe $C^\infty(U)$ i $C_o^\infty(U)$ są algebrami przemennymi (Zad. 4.18(c)). Zauważmy, że algebry $C^\infty(U)$ i $C_o^\infty(U)$ nie są ciałami, bo działanie mnożenia nie jest w ogólnym przypadku odwracalne.

Przykład 1.3 Niech U i V będą niepustymi zbiorami otwartymi w $\mathbb{R}^m$ takimi, że $V \subset U$, przy czym $U \setminus V \neq \emptyset$. Zbiory U i V generują przestrzenie $C^\infty(U)$ i $C^\infty(V)$. Niech $f \in C^\infty(U)$ i niech $f|_V$ będzie zawężeniem funkcji f do zbioru V , tj. $f|_V(y) = f(y)$ dla każdego $y \in V$. Jest widoczne, że $f|_V \in C^\infty(V)$. Zatem odwzorowanie P_V , określone równością $P_V f = f|_V$ jest przekształceniem przestrzeni $C^\infty(U)$ w przestrzeń $C^\infty(V)$. Można postawić pytanie w przeciwnym kierunku: czy każdą funkcję $g \in C^\infty(V)$ można przedłużyć do takiej funkcji $f \in C^\infty(U)$, że zachodzi $f(y) = g(y)$ dla każdego $y \in V$. Odpowiedź jest negatywna, jak zobaczymy na przykładzie. Niech U będzie kulą otwartą w $\mathbb{R}^m$ o środku w punkcie $0 = (0, 0, \dots, 0)$ i o promieniu $r > 0$ oraz niech V będzie kulą otwartą w $\mathbb{R}^m$ o środku w punkcie $0 = (0, 0, \dots, 0)$ i o promieniu $r - \varepsilon$, gdzie $0 < \varepsilon < r$. Rozpatrzmy funkcję

$$g(x) = (r - \varepsilon - |x|^2)^{-1},$$

gdzie $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2$. Jest widoczne (Zad. 4.23), że dla każdego $x \in V$ funkcja g ma ciągłe pochodne wszystkich rzędów, więc $g \in C^\infty(V)$, ale g nie jest ograniczona w V . Gdyby g miała rozszerzenie $f \in C^\infty(U)$, to rozszerzenie to byłoby nieograniczone w domknięciu $\bar{V}$ kuli V . Z drugiej strony f byłaby funkcją ciągłą w $\bar{V}$, wbrew temu, że funkcja ciągła f w zbiorze zwartym $\bar{V}$ jest ograniczona w $\bar{V}$.

Zobaczymy obecnie, że w każdej algebrze przemiennej można wprowadzić pojęcie różniczkowania.

Definicja 1.5 Niech $\mathcal{A}$ będzie algebrą przemenną nad ciałem $\mathbb{K}$, gdzie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. *Różniczkowaniem algebry $\mathcal{A}$* nazywamy każdy operator liniowy (II, Część 1, Definicja 1.23) $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ spełniający warunek

$$D(f \cdot g) = fD(g) + gD(f) \quad \text{dla } f, g \in \mathcal{A}.$$

Twierdzenie 1.3 (o różniczkowaniu algebry) *Niech $\mathcal{A}$ będzie algebrą przemenną. Wówczas rodzina Γ wszystkich różniczkowań algebry $\mathcal{A}$ stanowi przestrzeń wektorową przy działaniach $(D_1 + D_2)(f) = D_1(f) + D_2(f)$, $(cD_1)(f) = cD_1(f)$ dla $f \in \mathcal{A}$, $c \in \mathbb{K}$, $D_1, D_2 \in \Gamma$.*

Dowód. (a) Niech D_1 i D_2 będą różniczkowaniami algebry $\mathcal{A}$ i niech $c \in \mathbb{K}$. Niech ponadto $f, g \in \mathcal{A}$. Wówczas

$$\begin{aligned} (D_1 + D_2)(fg) &= D_1(fg) + D_2(fg) = \\ &= (fD_1(g) + gD_1(f)) + (fD_2(g) + gD_2(f)) = \\ &= f(D_1(g) + D_2(g)) + g(D_1(f) + D_2(f)) = \\ &= f(D_1 + D_2)(g) + g(D_1 + D_2)(f), \end{aligned}$$

więc $D_1 + D_2$ jest różniczkowaniem algebry $\mathcal{A}$, oraz

$$(cD_1)(fg) = cD_1(fg) = c(fD_1(g) + gD_1(f)) = f(cD_1(g)) + g(cD_1(f)),$$

co kończy dowód części (a). ■

Przykład 1.4 (a) Z reguł różniczkowania funkcji wynika, że operator różniczkowania $\frac{\partial}{\partial x_i}$, gdzie $i = 1, 2, \dots, m$ przyporządkowujący funkcji $\varphi \in C^\infty(U)$ jej pochodną $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, jest różniczkowaniem algebry $C^\infty(U)$, a z twierdzenia Schwarz'a o pochodnych mieszanych (II, Część 1, Twierdzenie 8.20) wnosiśmy, że nawias Liego $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}]$ jest równy tożsamościowo 0 dla $i, j = 1, 2, \dots, m$.

(b) Pochodna kierunkowa $\frac{\partial \varphi}{\partial a}$ funkcji φ w kierunku $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ (II, Część 1, Definicja 1.7) jest różniczkowaniem $C^\infty(U)$, bo mamy (por. II, Część 1, Twierdzenie 1.16) dla $\varphi, \psi \in C^\infty(U)$ i każdego $x \in U$ równości

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a}(\varphi\psi)(x) &= \sum_{j=1}^m a_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi\psi)(x) = \sum_{j=1}^m a_j \left(\varphi(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x) + \psi(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right) = \\ &= \varphi(x) \sum_{j=1}^m a_j \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x) + \psi(x) \sum_{j=1}^m a_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = \varphi(x) \frac{\partial \psi}{\partial a}(x) + \psi(x) \frac{\partial \varphi}{\partial a}(x). \end{aligned}$$

Definicja 1.6 Niech U będzie niepustym zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^m$. Wówczas różniczkowanie algebry $C^\infty(U)$ nazywamy *polem wektorowym na zbiorze U* .

Zbiór wszystkich pól wektorowych nad U oznaczajmy $\Gamma(U)$. W zbiorze $\Gamma(U)$ wprowadzimy *działania dodawania* jego *elementów* oraz *mnożenia jego elementu przez funkcję* $g \in C^\infty(U)$ w sposób następujący: jeżeli $X, Y \in \Gamma(U)$ i $g \in C^\infty(U)$, to

$$(X + Y)(f) = X(f) + Y(f), \quad (1.6)$$

$$(g \cdot X)(f) = g \cdot X(f). \quad (1.7)$$

Jest widoczne, że $\Gamma(U)$ jest wówczas grupą abelową ze względu na działanie $+$. Nie można jednak rozpatrywać $\Gamma(U)$ jako przestrzeni wektorowej nad ciałem $\mathbb{K} = C^\infty(U)$, gdyż jak widzieliśmy, $C^\infty(U)$ nie jest ciałem. Można jednak skorzystać z pojęcia ogólniejszego niż przestrzeń wektorowa, mianowicie z pojęcia modułu, które otrzymuje się, zastępując ciało skalarów $\mathbb{K}$ pierścieniem skalarów $\mathbb{P}$. Niech $\mathbb{P}$ będzie pierścieniem i niech w zbiorze niepustym $\mathcal{X}$ określone będą dwa działania: $+: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, względem którego $\mathcal{X}$ jest grupą abelową oraz $\cdot: \mathbb{P} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, gdzie zachodzą warunki: $a(x+y) = ax+ay$, $(a+b)x = ax+bx$, $a(bx) = (ab)x$ dla $x, y \in \mathcal{X}$ i $a, b \in \mathbb{P}$. Wówczas $\mathcal{X}$ z tymi działaniami nazywa się *modułem*. Jeżeli $\mathbb{P}$ jest pierścieniem z jednością 1, oraz $1 \cdot x = x$, to $\mathcal{X}$ nazywa się *modułem z jednością*.

Twierdzenie 1.4 (o module pól wektorowych na zbiorze U) *Niech U będzie zbiorem niepustym i otwartym w $\mathbb{R}^m$ i niech w zbiorze $\Gamma(U)$ pól wektorowych nad U określone będą działania dodawania i mnożenia przez funkcję z $C^\infty(U)$ równościami (1.6), (1.7). Wtedy*

- (a) *jeżeli $f = \text{const} \in C^\infty(U)$, to $X(f) = 0$ dla każdego $X \in \Gamma(U)$,*
- (b) *$\Gamma(U)$ jest modułem z jednością nad pierścieniem $C^\infty(U)$.*

Dowód. (a) Jeżeli $f(x) = 1$ dla każdego $x \in U$, to $f \cdot f = f$. Zatem dla każdego różniczkowania X algebry $C^\infty(U)$ mamy

$$X(f) = X(f \cdot f) = fX(f) + fX(f) = 2fX(f) = 2X(f),$$

a stąd $X(f) = 0$. Jeżeli $f(x) = c = \text{const}$, to z liniowości operatora X wnosimy, że $X(f) = X(c \cdot 1) = cX(1) = c \cdot 0 = 0$.

(b) Z Twierdzenia 1.3(a) wynika, że jeżeli $X, Y \in \Gamma(U)$, to $X + Y \in \Gamma(U)$. Co więcej, jeżeli $g \in C^\infty(U)$ i $X \in \Gamma(U)$, to dla każdych $\varphi, \psi \in C^\infty(U)$ zachodzi

$$(gX)(\varphi\psi) = g \cdot X(\varphi\psi) = g(\varphi X(\psi) + \psi X(\varphi)) = \varphi(gX)(\psi) + \psi(gX)(\varphi),$$

więc $gX \in C^\infty$. Sprawdzenie, że spełnione są aksjomaty modułu pozostawiamy Czytelnikowi (Zad. 4.20). ■

Uwaga 1.4 Rodzina pól wektorowych $\Gamma(U)$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$ jeśli dodawanie pól jest zdefiniowane wzorem (1.6) a mnożenie pola wektorowego przez liczbę rzeczywistą jest określone analogicznie do (1.7). W naszych dalszych rozważaniach struktura modułu nad pierścieniem $C^\infty(U)$ będzie znacznie istotniejsza niż struktura wspomnianej przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{R}$.

W dalszym ciągu zobaczymy, że wartość pola wektorowego $X(f)$ w punkcie $x \in U$ zależy tylko od wartości funkcji f w dowolnie małym otoczeniu punktu x , a nie zależy od wartości funkcji f w całym zbiorze U . Takie twierdzenia nazywa się twierdzeniami o lokalizacji. Spotkaliśmy się z nimi np. w teorii szeregów Fouriera, wykazując twierdzenie Riemanna o lokalizacji (I, Część 2, Twierdzenia 12.9 i 12.9').

Twierdzenie 1.5 (o lokalizacji dla pola wektorowego w $\mathbb{R}^m$) Niech U i V będą niepustymi zbiorami otwartymi w $\mathbb{R}^m$ takimi, że $V \subset U$. Wówczas

(a) jeżeli $g \in C^\infty(U)$ i $g(x) = 0$ dla każdego $x \in V$, to dla każdego $X \in \Gamma(U)$ zachodzi $(X(g))(x) = 0$ przy każdym $x \in V$,

(b) jeżeli $f, g \in C^\infty(U)$ są takie, że $f(y) = g(y)$ dla każdego $y \in V$ oraz $x \in V$, to dla każdego $X \in \Gamma(U)$ zachodzi równość $(X(f))(x) = (X(g))(x)$.

Dowód. (a) Ponieważ $x \in V$ i zbiór V jest otwarty, więc istnieje taka liczba $\varepsilon > 0$, że kula domknięta $\bar{K}_\varepsilon$ o środku w punkcie x i o promieniu ε zawiera się w V . Zastosujemy Twierdzenie 1.1 dla zbioru otwartego V i zawartego w nim zbioru zwartego $\bar{K}_\varepsilon$. Zgodnie z tezą tego twierdzeniem istnieje funkcja $\varphi \in C^\infty_o(\mathbb{R}^m)$ taka, że $\varphi(y) = 1$ dla $y \in \bar{K}_\varepsilon$ oraz $\text{supp } \varphi \subset V$. Niech $f(y) = 1 - \varphi(y)$, $y \in \mathbb{R}^m$. Wówczas $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, $f(y) = 1$ dla $y \notin V$ oraz $f(y) = 0$ dla $y \in \bar{K}_\varepsilon$, a w szczególności $f(x) = 0$. Rozpatrzmy funkcję fg . Oczywiście zachodzi $(fg)(y) = f(y)g(y) = g(y)$ gdy $y \notin V$. Natomiast gdy $y \in V$, to $g(y) = 0$, więc $(fg)(y) = f(y)g(y) = f(y) \cdot 0 = g(y)$. Zatem $(fg)(y) = g(y)$ dla każdego $y \in \mathbb{R}^m$. Ponieważ X jest różniczkowaniem $C^\infty(U)$, więc mamy dla $x \in V$

$$\begin{aligned} (X(g))(x) &= (X(fg))(x) = f(x)(X(g))(x) + g(x)(X(f))(x) = \\ &= g(x)(X(f))(x), \end{aligned}$$

bo $f(x) = 0$. Ale $g(y) = 0$ dla $y \in V$, więc w szczególności $g(x) = 0$. Zatem $(X(g)) = 0$, co kończy dowód części (a).

(b) Przypuśćmy, że $x \in V$ oraz $f, g \in C^\infty(U)$ są takie, że $f(y) = g(y)$ dla każdego $y \in V$. Oznaczmy $h(y) = f(y) - g(y)$ dla $y \in U$. Wtedy $h \in C^\infty(U)$ oraz $h(y) = 0$ dla $y \in V$. Z części (a) twierdzenia wnosimy, że dla każdego $X \in \Gamma(U)$ zachodzi $(X(h))(y) = 0$ dla $y \in V$, czyli $(X(f))(y) = (X(g))(y)$ dla $y \in V$. W szczególności zachodzi $(X(f))(x) = (X(g))(x)$. ■

Przykład 1.5 (a). Niech U będzie niepustym i otwartym zbiorem w $\mathbb{R}^m$ i niech $g_1, g_2, \dots, g_m \in C^\infty(U)$. Rozpatrzmy operator

$$D = \sum_{i=1}^m g_i \partial_i,$$

określony dla $f \in C^\infty(U)$ wzorem

$$D(f)(x) = \sum_{i=1}^m g_i(x) \partial_i f(x),$$

gdzie

$$\partial_i f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, m.$$

Ponieważ $\partial_i \in \Gamma(U)$ (Przykład 1.4(a)), więc na podstawie Twierdzenia 1.4(b) także $g_i \partial_i \in \Gamma(U)$. Stąd, na podstawie Twierdzenia 1.3(a), także $D = \sum_{i=1}^m g_i \partial_i \in \Gamma(U)$.

(b) Gradientem funkcji $\varphi \in C^\infty(U)$ w punkcie $x \in U$ nazywamy wektor $(\text{grad } \varphi)(x) = (\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}(x))$ (por. II, Część 1, Twierdzenie 1.12). Korzystając z poprzedniego przykładu możemy określić różniczkowanie algebry $C^\infty(U)$ związane z $(\text{grad } \varphi)$ wzorem

$$\nabla \varphi(f)(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \partial_i f(x).$$

(c) Różniczka $df(x, h)$ jest, przy ustalonym przyroście h , różniczkowaniem algebry $C^\infty(U)$.

Pokażemy obecnie, że wszystkie pola wektorowe $X \in \Gamma(U)$ są postaci, danej w Przykładzie 1.5(a) i co więcej, pola wektorowe $\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_m$ tworzą bazę modułu $\Gamma(U)$. Moduł posiadający bazę nazywamy *modułem wolnym*.

Twierdzenie 1.6 (o reprezentacji pól wektorowych) *Niech U będzie niepustym i otwartym zbiorem w $\mathbb{R}^m$. Wówczas pola wektorowe $\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_m$ tworzą bazę modułu $\Gamma(U)$, tj.*

(a) *dla każdego $X \in \Gamma(U)$ istnieją funkcje $g_1, g_2, \dots, g_m \in C^\infty(U)$ takie, że*

$$X(f)(x) = \sum_{i=1}^m g_i(x) \partial_i f(x) \tag{1.8}$$

dla każdej funkcji $f \in C^\infty(U)$ i dla każdego $x \in U$,

(b) *przedstawienie (1.8) pola wektorowego X jest jednoznaczne*

Uwaga 1.5 Zauważmy, że powyższe twierdzenie usprawiedliwia nazywanie różniczkowań algebry $C^\infty(U)$ polami wektorowymi. Z punktu (a) wynika bowiem, że działanie różniczkowania X na funkcje f w punkcie x polega na przyporządkowaniu tej funkcji jej pochodnej kierunkowej liczonej w punkcie x w kierunku wektora $(g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))$. Zatem rodzina wektorów $(g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))_{x \in U}$ jednoznacznie określa różniczkowanie X .

Dowód. (a) Niech $X \in \Gamma(U)$ i $x \in U$. Ponieważ zbiór U jest otwarty, więc istnieje kula $K(x, r)$ o środku w punkcie x i o promieniu $r > 0$ taka, że $K(x, r) \subset U$. Niech $y \in K(x, r)$ oraz niech $f \in C^\infty(U)$, wtedy funkcja $g(t) = f(x + t(y - x))$ jest określona dla wszystkich $t \in]0, 1[$ i $g \in C^\infty(]0, 1[)$, a ponadto $g(0) = f(x)$ i $g(1) = f(y)$. Zatem na podstawie zasadniczego wzoru rachunku całkowego (I, Część 2, Twierdzenie 10.1 6°) zachodzi równość

$$f(y) - f(x) = g(1) - g(0) = \int_0^1 \frac{dg}{dt}(t) dt.$$

Przyjmując $u(t) = x + t(y - x)$ dla $t \in]0, 1[$ mamy, na podstawie wzoru na pochodną funkcji złożonej (II, Część 1, Uwaga 1.1) równość

$$\begin{aligned} g'(t) &= (f \circ u)'(t) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + t(y - x)) \frac{du_i}{dt}(t) = \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + t(y - x))(y_i - x_i), \end{aligned}$$

gdzie $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ oraz $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ (por. też II, Część 1, dowód Twierdzenia 1.15). Oznaczmy

$$h_i(y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + t(y - x)) dt, \quad y \in K(x, r).$$

Ponieważ $f \in C^\infty(U)$, więc stosując twierdzenie o ciągłości całki właściwej zależnej od parametru (I, Część 2, Twierdzenie 11.6) w przypadku funkcji wielu zmiennych (por. Zad. 4.22) stwierdzimy, że $h_i \in C^\infty(K(x, r))$ dla $i = 1, 2, \dots, m$, oraz $h_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, przy czym

$$f(y) = f(x) + \int_0^1 \frac{dg}{dt}(t) dt = f(x) + \sum_{i=1}^m (y_i - x_i) h_i(y), \quad y \in K(x, r).$$

Niech $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ będzie funkcją gładką o zwartym nośniku taką, że $\text{supp } \psi \subset K(x, r)$ i $\psi(y) = 1$ jeśli $y \in K(x, \frac{r}{2})$. W dalszych rozważaniach będziemy potrzebowali również funkcje $\varphi_i(y) = y_i$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in U$, $i = 1, \dots, m$. Przyjmiemy

$$\tilde{h}_i(y) = \begin{cases} \psi(y) h_i(y) & \text{jeśli } y \in K(x, r), \\ 0 & \text{jeśli } y \notin K(x, r). \end{cases}$$

oraz

$$\tilde{f}(y) = f(x) + \sum_{i=1}^m (\varphi_i(y) - x_i) \tilde{h}_i(y), \quad (1.9)$$

przy stałym x . Z określenia funkcji h_i i ψ wynika, że funkcje $\tilde{h}_i$ są gładkie oraz, że $\tilde{h}_i(y) = h_i(y)$, dla $y \in K(x, \frac{r}{2})$, $i = 1, \dots, m$. Gładka jest również funkcja $\tilde{f}$ oraz $\tilde{f}(y) = f(y)$, dla $y \in K(x, \frac{r}{2})$. Z równości (1.9) wynika zatem, że dla każdego $X \in \Gamma(U)$ mamy

$$X(\tilde{f}) = X(f(x)) + X\left(\sum_{i=1}^m (\varphi_i - x_i) \tilde{h}_i\right).$$

Jednak $f(x)$ jest funkcją stałą, więc na podstawie Twierdzenia 1.4(a) mamy $(X(f))(f(x)) = 0$. Zatem

$$X(\tilde{f}) = X\left(\sum_{i=1}^m (\varphi_i - x_i) \tilde{h}_i\right).$$

Korzystając z tego, że operator X jest liniowy oraz że jest różniczkowaniem algebry $C^\infty(U)$ otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} X(\tilde{f}) &= \sum_{i=1}^m X((\varphi_i - x_i) \tilde{h}_i) = \sum_{i=1}^m [(\varphi_i - x_i) X(\tilde{h}_i) + \tilde{h}_i X(\varphi_i - x_i)] = \\ &= \sum_{i=1}^m [(\varphi_i - x_i) X(\tilde{h}_i) + \tilde{h}_i X(\varphi_i) - \tilde{h}_i X(x_i)] = \\ &= \sum_{i=1}^m (\varphi_i - x_i) X(\tilde{h}_i) + \sum_{i=1}^m X(\varphi_i) \tilde{h}_i, \end{aligned}$$

bo $X(x_i) = 0$ ze względu na to, że x_i jest funkcją stałą. Zatem dla każdego $z = (z_1, z_2, \dots, z_m)$ zachodzi

$$(X(\tilde{f}))(z) = \sum_{i=1}^m (z_i - x_i) (X(\tilde{h}_i))(z) + \sum_{i=1}^m (X(\varphi_i))(z) \tilde{h}_i(z).$$

Przyjmijmy w powyższej tożsamości, że $z \rightarrow x$ w $\mathbb{R}^m$, czyli $z_i \rightarrow x_i$ dla $i = 1, 2, \dots, m$. Wtedy, ze względu na ciągłość funkcji $X(\tilde{f})$, $X(\tilde{h}_i)$ oraz $X(\varphi_i)$ mamy

$$(X(\tilde{f}))(x) = \sum_{i=1}^m (X(\varphi_i))(x) \tilde{h}_i(x).$$

Ale $\tilde{f}(y) = f(y)$ i $\tilde{h}_i(y) = h_i(y)$ jeśli $y \in K(x, r)$. Zatem z punktu (b) Twierdzenia 1.5 wynika, że $(X(\tilde{f}))(y) = (X(f))(y)$ i $(X(\tilde{h}_i))(y) = (X(h_i))(y)$ dla każdego $y \in K(x, r)$. Ostatnia równość przyjmuje zatem postać,

$$(X(f))(x) = \sum_{i=1}^m (X(\varphi_i))(x) h_i(x).$$

Jednak $h_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \partial_i f(x)$, więc

$$X(f) = \sum_{i=1}^m X(\varphi_i) \partial_i f.$$

Dobierając $g_i = X(\varphi_i)$, otrzymujemy ostatecznie równość

$$X(f) = \sum_{i=1}^m g_i \partial_i f,$$

więc (1.8). Zakończyliśmy dowód części (a).

(b) Aby udowodnić jednoznaczność przedstawienia (1.8) pola wektorowego X wystarczy wykazać, że operatory $\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_m$ są liniowo niezależne nad $C^\infty(U)$, czyli, że jeżeli $\sum_{i=1}^m g_i \partial_i = 0$, gdzie $g_i \in C^\infty(U)$, to $g_i = 0$ dla $i = 1, 2, \dots, m$. Równość $\sum_{i=1}^m g_i \partial_i = 0$ znaczy, że $\sum_{i=1}^m g_i \partial_i f = 0$ dla każdego $f \in C^\infty(U)$. Obierzmy $f_j(x) = x_j$ dla $j = 1, 2, \dots, m$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in U$, wtedy

$$0 = \sum_{i=1}^m g_i(x) \partial_i f_j(x) = g_i(x),$$

bo $\partial_i f_j(x) = 1$ gdy $j = i$ oraz $\partial_i f_j(x) = 0$ gdy $j \neq i$. Wykazaliśmy, że $g_i(x) = 0$ dla każdego $x \in U$ oraz $i = 1, 2, \dots, m$. ■

Wróćmy obecnie do Twierdzenia 1.5. Wynika z niego w szczególności, że każda para (x, X) , gdzie $x \in U$ i $X \in \Gamma(U)$ definiuje formę liniową $X_x : C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$ równością $X_x(f) = X(f)(x)$ dla $f \in C^\infty(U)$. W szczególności otrzymujemy formy $\partial_{i,x}(f) = \partial_i(f)(x)$, $i = 1, \dots, m$.

Definicja 1.7 Niech U będzie zbiorem niepustym i otwartym w $\mathbb{R}^m$ i niech $x \in U$. Wówczas rodzinę $T_x U = \{X_x : X \in \Gamma(U)\}$ nazywa się *przestrzenią styczną do U w punkcie $x \in U$* , a jej elementy nazywa się *wektorami stycznymi*. Sumę $TU = \bigcup_{x \in U} T_x U$ nazywa się *wiązką styczną do U* .

Twierdzenie 1.7 (o przestrzeni stycznej do U) Niech U będzie zbiorem niepustym i otwartym w $\mathbb{R}^m$ i niech $x \in U$. Wówczas

(a) przestrzeń styczna $T_x U$ jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$ wymiaru m . Formy $\partial_{i,x}$, $i = 1, \dots, m$, tworzą bazę przestrzeni $T_x U$.

(b) Odwzorowanie liniowe $L : C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$ jest wektorem stycznym w punkcie $x \in U$ wtedy i tylko wtedy, gdy $L(fg) = f(x)L(g) + g(x)L(f)$ dla każdych $f, g \in C^\infty(U)$.

Dowód. (a) wynika natychmiast z Twierdzenia 1.6

(b) Jeżeli $L : C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$ jest wektorem stycznym w punkcie x , to istnieje takie różniczkowanie $\tilde{L}$ algebry $C^\infty(U)$, że $L(f) = \tilde{L}(f)(x)$. Zatem spełniona jest równość

$$L(fg) = f(x)L(g) + g(x)L(f). \quad (1.10)$$

Na odwrót, przypuśćmy, że odwzorowanie liniowe $L : C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia wymienioną równość. Niech $K(x, r)$ będzie kulą o środku x zawartą w zbiorze otwartym U . Wykażemy wpraw, że jeżeli wartość funkcji $f \in C^\infty(U)$ jest równa zero w każdym punkcie tej kuli to $L(f) = 0$. W dowodzie Twierdzenia 1.5 pokazano, że istnieje wówczas funkcja $g \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ taka, że $g(x) = 0$ i $f(y) = g(y)f(y)$ dla każdego punktu $y \in U$. Wtedy

$$L(f) = L(gf) = g(x)L(f) + f(x)L(g) = 0$$

gdyż $g(x) = f(x) = 0$. Argumentując tak jak w dowodzie punktu (b) Twierdzenia 1.5 wykazujemy, że $L(f_1) = L(f_2)$ jeśli $f_1, f_2 \in C^\infty(U)$ oraz $f_1(y) = f_2(y)$ dla każdego $y \in K(x, \frac{r}{2})$.

Stosując równość (1.10) dla funkcji $f = g \equiv 1$ otrzymujemy, że $L(1) = L(1 \cdot 1) = 1 \cdot L(1) + 1 \cdot L(1) = 2L(1)$, zatem $L(1) = 0$. Ponieważ odwzorowanie L jest liniowe, więc stąd wynika, że $L(c) = 0$ dla każdego $c \in \mathbb{R}$.

Niech $\tilde{f}$ będzie funkcją określoną wzorem (1.9). Wówczas $f(y) = \tilde{f}(y)$ dla każdego $y \in K(x, \frac{r}{2})$. Ponadto $L(f(x)) = 0$ ponieważ $f(x)$ jest liczbą, więc funkcją stałą. Zatem

$$\begin{aligned} L(f) &= L(\tilde{f}) = L(f(x)) + \sum_{i=1}^m L((\varphi - x_i)\tilde{h}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^m \left((\varphi(x) - x_i)L(h_i) + \tilde{h}_i(x)L(\varphi - x_i) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^m L(\varphi - x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \sum_{i=1}^m L(\varphi - x_i) \partial_i f(x), \end{aligned}$$

gdź $\varphi_i(x) = x_i$ oraz $\tilde{h}_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$. Niech $X = \sum_{i=1}^m g_i \partial_i$, gdzie $g_i(y) \equiv L(\varphi - x_i)$, $y \in U$. Wówczas $X \in \Gamma(U)$ i $L = X_x$. ■

Uwaga 1.6 Z punktu (a) ostatniego twierdzenia wynika, że każdy wektor $(c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m$ wyznacza jednoznacznie wektor styczny $v = \sum_{i=1}^m c_i \partial_{i,x}$ w punkcie x , który przyporządkowuje funkcji wartość jej pochodnej kierunkowej liczonej w tym punkcie w kierunku wektora $(c_1, \dots, c_m)$. Czytelnik zauważył z pewnością, że pole wektorowe na zbiorze otwartym w $\mathbb{R}^m$ oraz przestrzeń styczną do tego zbioru można zdefiniować nie używając pojęcia różniczkowania algebry. W następnym rozdziale będziemy jednak mówić o polach wektorowych na rozmaitościach, wtedy pojęcie różniczkowania algebry okaże się dogodnym sposobem definiowania pól wektorowych.

Przykład 1.6 Oznaczmy, zgodnie z Przykładem 1.5(a),

$$\nabla f(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \partial_i,$$

gdzie $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Wówczas dla każdego $x \in U$, $\nabla f(x)$ należy do $\Gamma(U)$, jest więc wektorem stycznym do U ; zatem $\nabla f : U \rightarrow \Gamma(U)$. Równość definiująca $\nabla f(x)$ pokazuje, że w bazie modułu $\Gamma(U)$, którą stanowią pola wektorowe $\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_m$ (por. Twierdzenie 1.5), wektor $\nabla f(x)$ ma współrzędne $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x)$, zatem jest gradientem funkcji f w punkcie x .

Definicja 1.8 Pole wektorowe X na U nazywamy *polem potencjalnym*, gdy istnieje funkcja $f \in C^\infty(U)$ taka, że $\nabla f(x) = X(x)$ dla każdego $x \in U$; funkcję f nazywamy *potencjałem pola* X .

Rozdział 2

Rozmaitości różniczkowe

2.1 Rozmaitości topologiczne i różniczkowe w $\mathbb{R}^m$

W III, Części 1, przedstawiony jest problem całkowania po powierzchni S w $\mathbb{R}^3$. Powierzchnię taką określiliśmy przy pomocy trzech równań $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$, gdzie $(u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, przy czym zakładaliśmy, że odwzorowanie $\Phi : \Omega \rightarrow S$ określone równością $\Phi(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$, $(u, v) \in \Omega$, jest $C^{(1)}$ -regularne. W przypadku dowolnej przestrzeni $\mathbb{R}^m$ w miejsce powierzchni wprowadzimy pojęcie rozmaitości M wymiaru $k \leq m$ w przestrzeni $\mathbb{R}^m$ (ang. manifold), składającej się z kawałków, z których każdy można utożsamić z pewnym podzbiorem otwartym w $\mathbb{R}^k$ przy pomocy pewnej bijekcji. W zależności od warunków regularności, którym czynią zadość owe lokalne odwzorowania, otrzymujemy różne rodzaje rozmaitości: rozmaitość topologiczną, $C^{(1)}$ -rozmaitość, C^∞ -rozmaitość. Z pojęciem $C^{(1)}$ -rozmaitości spotkaliśmy się już w tomie II, Części 1, §1.6; odwzorowaniami kawałków M , gdzie $M \subset \mathbb{R}^m$, w $\mathbb{R}^k$, były dyfeomorfizmy klasy $C^{(1)}$. Obecnie zajmiemy się rozmaitościami pozostałych dwóch typów: rozmaitością topologiczną i C^∞ -rozmaitością. Na zbiorze M możemy określić odległość i rodzinę zbiorów otwartych tak, jak zostało to opisane w Uwadze 1.1 (a), w przypadku gdy $A = M$ i $X = \mathbb{R}^m$.

Podstawowym pojęciem dla rozmaitości topologicznej jest pojęcie homeomorfizmu. Niech $M \subset \mathbb{R}^m$, $M \neq \emptyset$. Niech U będzie otwartym podzbiorem zbioru M oraz niech V będzie otwartym zbiorem w $\mathbb{R}^k$. Przypomnijmy, że odwzorowanie $\Phi : U \rightarrow V$ nazywamy *homeomorfizmem*, gdy jest bijekcją U na V (tj. odwzorowaniem różnowartościowym U na V ; por. I, Część 1, §1), przy czym zarówno Φ jak i odwzorowanie odwrotne $\Phi_{-1} : V \rightarrow U$ są ciągłe (II, Część 1, Definicja 1.12).

W przyszłości potrzebować będziemy rozmaitości 0-wymiarowych dlatego 0-wymiarową przestrzenią euklidesową $\mathbb{R}^0$ będziemy nazywać zbiór złożony z jednego punktu $\mathbb{R}^0 = \{0\}$. Jedynymi zbiorami otwartymi w $\mathbb{R}^0$ są oczywiście zbiór pusty $\emptyset$ i cała przestrzeń $\mathbb{R}^0 = \{0\}$

Definicja 2.1 Niech $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^m$ i $0 \leq k \leq m$. Zbiór M nazywa się *rozmaitością topologiczną* wymiaru k , gdy każdy punkt $x \in M$ ma otoczenie $U \subset M$ w M homeomorficzne z pewnym podzbiorem $V \subset \mathbb{R}^k$ otwartym w $\mathbb{R}^k$, tj. gdy istnieje homeomorfizm Φ zbioru U na zbiór $V \subset \mathbb{R}^k$. Homeomorfizm Φ nazywamy *mapą*.

Uwaga 2.1 Niech U_1, U_2 będą dwoma podzbiórami otwartymi rozmaitości topologicznej M , przy czym $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Niech $\Phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ i $\Phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ będą dwiema mapami w M . Wówczas odwzorowanie $(\Phi_1)_{-1} : V_1 \rightarrow U_1$ jest ciągłe. Stąd, jak Czytelnik łatwo sprawdzi, odwzorowanie złożone $\Phi_2 \circ (\Phi_1)_{-1} : \Phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \Phi_2(U_1 \cap U_2)$ jest też ciągłe.

Przykład 2.1 (a) Cała przestrzeń $\mathbb{R}^m$ jest rozmaitością topologiczną wymiaru m w $\mathbb{R}^m$. Zbiór $U = \mathbb{R}^m$ jest otoczeniem dowolnego punktu $x \in M$, a odwzorowanie identyczne $\Phi = \text{id}$, $\Phi(u) = u$ - homeomorfizmem U na $V = \mathbb{R}^m$.

(b) Niech M będzie podzbiorem otwartym niepustym przestrzeni $\mathbb{R}^m$. Wystarczy obrać $U = M$ oraz $\Phi(u) = u$, wtedy $\Phi : U \rightarrow V$, gdzie $V = U$, jest mapą przy każdym $x \in M$.

(c) Niech $M = \{(x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m : x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}\}$, gdzie $k < m$. Wówczas dla każdego $x \in M$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$. Obierając $U = M$ i $\Phi(x) = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in V = \mathbb{R}^k$ otrzymujemy, że M jest rozmaitością wymiaru k w $\mathbb{R}^m$.

(d) Niech $M = S^1 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Dla każdego $(x_1, x_2) \in M$ istnieje wówczas argument φ punktu (x_1, x_2) , spełniający równania $x_1 = \cos \varphi$, $x_2 = \sin \varphi$. Rozpatrzmy następujące dwa zbiory $U_1, U_2 \subset M$.

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1 > 0 \text{ lub } x_2 > 0\}, \\ U_2 &= \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_1 < 0 \text{ lub } x_2 < 0\} \end{aligned}$$

Zauważmy, że $(x_1, x_2) \in U_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \in (-\frac{1}{2}\pi, \pi)$, oraz $(x_1, x_2) \in U_2$ wtedy i tylko wtedy gdy $\varphi \in (\frac{1}{2}\pi, 2\pi)$. Przyjmijmy $\Phi_1(x_1, x_2) = \varphi + \frac{1}{2}\pi$ i $\Phi_2(x_1, x_2) = \varphi - \frac{1}{2}\pi$. Wtedy Φ_1 odwzorowuje U_1 wzajemnie jednoznacznie na $V_1 = (0, \frac{3}{2}\pi)$, Φ_2 odwzorowuje U_2 wzajemnie jednoznacznie na $V_2 = (0, \frac{3}{2}\pi)$, przyczym $\Phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ i $\Phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$

są homeomorfizmami. Jest jasne, że każdy punkt $(x_1, x_2) \in M$ należy do któregoś ze zbiorów U_1, U_2 , oraz że obydwa zbiory U_1, U_2 są otwarte w M , a V_1 i V_2 są otwarte w $\mathbb{R}$. Okrąg S^1 jest zatem rozmaiłością topologiczną wymiaru 1 w $\mathbb{R}^2$.

Zauważmy jeszcze, że w przeciwieństwie do Przykładów (a) - (c), układu obydwa zbiorów V_1, V_2 nie można zastąpić jednym uniwersalnym zbiorem U . Musiałby być wówczas $U = M$, a $\Phi : U \rightarrow V$ - homeomorfizmem domkniętego w $\mathbb{R}^2$ zbioru U na otwarty w $\mathbb{R}$ zbiór V . To nie jest możliwe, bo wówczas przeciwbrazem otwartego w $\mathbb{R}$ zbioru V przy pomocy odwzorowania ciągłego Φ_{-1} byłby zbiór U , nie otwarty w $\mathbb{R}^2$ - sprzeczność (por. I, Część 1, Twierdzenie 5.30).

(e) Niech $M = S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$. Oznaczmy $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ dla $x = (x_1, x_2, x_3)$. Oznaczmy:

$$\begin{aligned} U_1 &= S_3^+ = \{x \in S^2 : x_3 > 0\}, & U_2 &= S_3^- = \{x \in S^2 : x_3 < 0\}, \\ U_3 &= S_2^+ = \{x \in S^2 : x_2 > 0\}, & U_4 &= S_2^- = \{x \in S^2 : x_2 < 0\}, \\ U_5 &= S_1^+ = \{x \in S^2 : x_1 > 0\}, & U_6 &= S_1^- = \{x \in S^2 : x_1 < 0\}. \end{aligned}$$

Niech $\Phi_1 : U_1 \rightarrow V_3, \Phi_2 : U_2 \rightarrow V_3$ będą rzutowaniami odpowiednio zbiorów U_1, U_2 na koło $V_3 = \{(x_1, x_2, 0) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$, $\Phi_3 : U_3 \rightarrow V_2, \Phi_4 : U_4 \rightarrow V_2$ - na koło $V_2 = \{(x_1, 0, x_3) : x_1^2 + x_3^2 < 1\}$, oraz $\Phi_5 : U_5 \rightarrow V_1, \Phi_6 : U_6 \rightarrow V_1$, na koło $V_1 = \{(0, x_2, x_3) : x_2^2 + x_3^2 < 1\}$. Rzutowania $\Phi_1, \dots, \Phi_6$ są, jak łatwo stwierdzić, homeomorfizmami (por. II, Część 1, Przykład 1.27). Zatem sfera S^2 jest rozmaiłością topologiczną wymiaru 2 w $\mathbb{R}^3$.

(f) Podobnie jak w przypadku (e) można wykazać łatwo, że sfera $m - 1$ wymiarowa $M = S^{m-1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^m$ jest rozmaiłością topologiczną wymiaru $m - 1$ w $\mathbb{R}^m$.

(g) Dowolny punkt w $\mathbb{R}^m$ jest rozmaiłością 0-wymiarową w $\mathbb{R}^m$. Podobnie dowolny zbiór złożony ze skończonej ilości punktów.

Rozmaiłość topologiczna k -wymiarowa M ma te same własności lokalne co przestrzeń $\mathbb{R}^k$. Wynika to natychmiast z jej definicji. W szczególności jeżeli $U \subset M$ jest otoczeniem punktu $x \in M$ to można zawsze znaleźć zbiór zwarty $V \subset M$ o niepustym wnętrzu V° taki, że $x \in V^\circ$ oraz $V \subset U$. Z tej własności będziemy wielokrotnie korzystać. Okazuje się jednak, że również pewne cechy globalne rozmaiłości topologicznej M są takie same jak przestrzeni $\mathbb{R}^k$. Pokażemy tutaj, że w przypadku takiej rozmaiłości spójność pokrywa się z łukową spójnością.

Przypomnijmy, że przestrzeń metryczna M jest *niespójna*, gdy istnieją zbiory otwarte i niepuste M_1 i M_2 w M takie, że $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ i

$M = M_1 \cup M_2$. W przeciwnym przypadku mówimy, że *przestrzeń metryczna* jest *spójna* (I, Część 1, Definicja 1.14). Zbiór $A \subset M$ nazywamy *spójnym*, gdy jest przestrzenią metryczną spójną w metryce indukowanej w A przez M . Np. zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy jest przedziałem (właściwym lub niewłaściwym) lub gdy składa się z jednego punktu (I, Część 1, Twierdzenie 4.17). Zbiór niepusty otwarty $A \subset \mathbb{R}^m$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy dowolne dwa jego punkty, można połączyć linią łamaną leżącą całkowicie w A (I, Część 1, Twierdzenie 4.18). Można wprowadzić jeszcze jedno pojęcie spójności, tzw. łukową spójność.

Definicja 2.2 Niepusty zbiór A przestrzeni metrycznej M nazywa się *zbiorem łukowo spójnym*, gdy dla dwóch dowolnych punktów $x_1, x_2 \in A$ istnieje odwzorowanie ciągle Φ przedziału $< 0, 1 >$ w zbiór A takie, że $\Phi(0) = x_1$ i $\Phi(1) = x_2$.

Uwaga 2.2 Zbiór $\varphi(< 0, 1 >)$ można interpretować jako trajektorię cząsteczki poruszającej się od punktu x_1 do punktu x_2 . Zbiór jest zatem łukowo spójny jeżeli cząsteczka poruszająca się wewnątrz tego zbioru może wyruszając z dowolnego punktu osiągnąć każdy inny punkt tego zbioru.

Pokażemy, że łukowa spójność pociąga zawsze spójność.

Twierdzenie 2.1 (o przestrzeni łukowo spójnej) *Przestrzeń metryczna M łukowo spójna jest spójna.*

Dowód nie wprost. Przypuśćmy, że M jest przestrzenią metryczną łukowo spójną, ale nie jest spójna.. Z tego ostatniego wynika, że w M istnieją zbiory otwarte i niepuste M_1 i M_2 takie, że $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ i $M = M_1 \cup M_2$. Weźmy dowolne dwa punkty $x_1 \in M_1$ i $x_2 \in M_2$. Ponieważ przestrzeń M jest łukowo spójna, więc istnieje odwzorowanie ciągle Φ przedziału $< 0, 1 >$ w M , taki, że $\Phi(0) = x_1$ i $\Phi(1) = x_2$. Niech $I_1 = \Phi_{-1}(M_1)$ i $I_2 = \Phi_{-1}(M_2)$. Ponieważ M_1 i M_2 są otwarte w M , więc ich przeciwzbiory przy pomocy funkcji ciągłej φ w $< 0, 1 >$ są otwarte w $< 0, 1 > \in \mathbb{R}$ (I, Część 1, Twierdzenie 5.30), tj. I_1 i I_2 są otwarte w $< 0, 1 >$. Ponadto (por. I, Część 1, Rozdział V, §1)

$$\begin{aligned} I_1 \cap I_2 &= \Phi_{-1}(M_1) \cap \Phi_{-1}(M_2) = \Phi_{-1}(M_1 \cap M_2) = \Phi_{-1}(\emptyset) = \emptyset, \\ I_1 \cup I_2 &= \Phi_{-1}(M_1) \cup \Phi_{-1}(M_2) = \varphi_{-1}(M_1 \cup M_2) = \Phi_{-1}(M) = < 0, 1 >. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że przedział $< 0, 1 >$ jest przestrzenią niespójną. Jest to sprzeczne z wyżej wspomnianym warunkiem koniecznym i dostatecznym spójności zbioru w $\mathbb{R}$ (por. I, Część 1, Twierdzenie 4.17). ■

Przykład 2.2 (a) Niech $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ dla $0 < x \leq \frac{2}{\pi}$, $f(0) = 0$. Oznaczmy przez M wykres funkcji f w $\mathbb{R}^2$, tj. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), x \in < 0, \frac{2}{\pi} >\}$ (por. I, Część 1, Przykład 5.11). Pokażemy, że M jest zbiorem spójnym w $\mathbb{R}^2$. Gdyby tak nie było, to istniałyby zbiory M_1 i M_2 niepuste i otwarte w M takie, że $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ i $M = M_1 \cup M_2$. Ponieważ M_1 i M_2 są otwarte, więc muszą obydwa zawierać punkty postaci $(x, \sin \frac{1}{x})$, gdzie $0 < x < \frac{2}{\pi}$. Niech $(x_1, \sin \frac{1}{x_1}) \in M_1$, $0 < x_1 < \frac{2}{\pi}$ oraz $(x_2, \sin \frac{1}{x_2}) \in M_2$, $0 < x_2 < \frac{2}{\pi}$. Możemy przypuścić, że $x_1 < x_2$. Oznaczmy $x_o = \sup\{x : (x, \sin \frac{1}{x}) \in M_1 \text{ i } x_1 < x < x_2\}$. Gdyby $(x_o, \sin \frac{1}{x_o}) \in M_2$, to ponieważ $(x, \sin \frac{1}{x}) \notin M_2$ dla $x_1 < x < x_o$, więc $(x_o, \sin \frac{1}{x_o})$ należałoby do M_2 , ale nie byłby punktem wewnętrznym zbioru M_2 . To nie jest możliwe, bo M_2 jest zbiorem otwartym w M . Zatem musi być $(x_o, \sin \frac{1}{x_o}) \in M_1$. Ale z definicji x_o , w dowolnym prawostronnym otoczeniu punktu x_o w M istnieją punkty, nie należące do M_1 . Zatem $(x_o, \sin \frac{1}{x_o})$ nie jest punktem wewnętrznym zbioru M_1 , co jest sprzeczne z otwartością M_1 w M . Przypuszczenie, że M jest niespójny doprowadziło więc do sprzeczności. Zatem zbiór M jest spójny w $\mathbb{R}^2$.

Wykażemy obecnie, że M nie jest łukowo spójny. Gdyby tak było, to istniałby homomorfizm Φ przedziału $< 0, 1 >$ na zbiór M taki, że $\Phi(0) = (0, 0)$ oraz $\Phi(1) = (\frac{2}{\pi}, \sin \frac{\pi}{2}) = (\frac{2}{\pi}, 1)$. Ponieważ $< 0, 1 >$ jest zbiorem zwartym, więc jego obraz $M = \Phi(< 0, 1 >)$ byłby zwarty (I, Część 1, Twierdzenie 5.31), a zatem byłby domknięty. Niech $x_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$ dla $n = 1, 2, \dots$ Rozpatrzmy ciąg $(x_n, f(x_n))$ punktów zbioru M . Ponieważ $f(x_n) = \sin(4n+1)\frac{\pi}{2} = 1$ dla $n = 1, 2, \dots$, więc $(x_n, f(x_n)) \rightarrow (0, 1)$ przy $n \rightarrow \infty$. Jednak $(0, 1) \notin M$. Zatem zbiór M nie jest domknięty. Przypuszczenie, że M jest łukowo spójny doprowadziło do sprzeczności. Widzimy więc, że zbiór spójny nie musi być łukowo spójny, zatem Twierdzenia 2.1 nie można odwrócić.

(b) Jak wspomniano wyżej, zbiór niepusty otwarty A w $\mathbb{R}^m$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy dowolne dwa jego punkty można połączyć linią łamaną L bez punktów wielokrotnych leżącą całkowicie w A . Niech $x_1 \in A$, $x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ i niech długość łamanej L będzie równa l . Niech dla dowolnego punktu x łamanej L , $\Phi_{-1}(x) = t$, gdzie t jest ilorazem długości części łamanej od x_1 do x przez liczbę l . Wtedy odwzorowanie Φ odwrotne do Φ_{-1} jest homeomorfizmem przedziału $< 0, 1 >$ na L takim, że $\Phi(0) = x_1$ i $\Phi(1) = x_2$. Zatem zbiór A jest łukowo spójny. Stąd, na podstawie Twierdzenia 2.1 możemy stwierdzić, że w przypadku niepustego, otwartego podzbioru przestrzeni $\mathbb{R}^m$, pojęcie spójności i łukowej spójności są równoważne.

Wykażemy obecnie, że wynik Przykładu 2.2(b) pozostaje w mocy, gdy w miejsce zbioru otwartego A wzięć dowolną rozmaitość topologiczną wy-

miaru k w przestrzeni $\mathbb{R}^m$, gdzie $k \leq m$.

Twierdzenie 2.2 (o spójności rozmaitości topologicznej) *Rozmaitość topologiczna M w $\mathbb{R}^m$ dowolnego wymiaru $k \leq m$ jest spójna wtedy i tylko wtedy gdy jest łukowo spójna.*

Dowód. 1° Na podstawie Twierdzenia 2.1 wystarczy udowodnić, że łukowo spójna rozmaitość topologiczna jest spójna. Przy danym $x \in M$ oznaczmy przez M_x zbiór składający się z x oraz z wszystkich elementów $y \in M$, dla których istnieje odwzorowanie ciągle Φ przedziału $< 0, 1 >$ w rozmaitość M takie, że $\Phi(0) = x$ i $\Phi(1) = y$. Twierdzenie będzie udowodnione gdy wykazemy, że $M_x = M$. Zważmy najpierw, że zbiór M_x nie jest pusty, bowiem punkt x zawsze należy do M_x . Aby to wykazać wystarczy wziąć odwzorowanie Φ równe tożsamościowo x .

2° Wykażemy teraz, że zbiór M_x jest otwarty. Niech $y \in M_x$ będzie dowolnym punktem należącym do tego zbioru. Ponieważ M jest rozmaitością topologiczną, więc istnieje otoczenie U_y punktu y w M oraz homeomorfizm Φ_y otoczenia U_y na pewien zbiór otwarty $V_y \in \mathbb{R}^k$. Rozpatrzmy dowolną kulę K_y w $\mathbb{R}^k$ o środku w punkcie $\Phi_y(y)$ taką, by $K_y \subset V_y$; kule takie istnieją ze względu na otwartość V_y w $\mathbb{R}^k$. Mamy $y \in (\Phi_y)_{-1}(K_y)$, przy czym zbiór $(\Phi_y)_{-1}(K_y)$ jest otwarty w M jako przeciwobraz zbioru K_y otwartego w $\mathbb{R}^k$ przy pomocy odwzorowania ciągłego Φ_y . Weźmy dowolny element $z \in (\Phi_y)_{-1}(K_y)$, wtedy $\Phi_y(z) \in K_y$. Niech $\Phi_y(y) = (p_1, \dots, p_k) \in \mathbb{R}^k$ $\Phi_y(z) = (q_1, \dots, q_k) \in \mathbb{R}^k$. Wówczas odwzorowanie $\varphi(t) = (p_1 + t(q_1 - p_1), \dots, p_k + t(q_k - p_k))$ jest odwzorowaniem ciągłym łączącym punkty $\Phi_y(y) = \varphi(0)$ i $\Phi_y(z) = \varphi(1)$, ponad to $\varphi(t) \in K_y$ dla dowolnego $0 \leq t \leq 1$. Zatem odwzorowanie $(\Phi_y)_{-1} \circ \varphi : < 0, 1 > \rightarrow M$ jest odwzorowaniem ciągłym łączącym punkty y i z . Z rozumowania tego wynika zatem, że zbiór otwarty $(\Phi_y)_{-1}(K_y)$ zawiera się w M_x . Zatem zbiór M_x jest otwarty.

3° Przypuśćmy obecnie, że $M_x \neq M$ i oznaczmy $M'_x = M \setminus M_x$. Wykażemy, że zbiór M'_x jest także otwarty w M . Gdyby tak nie było, to w dowolnie małej odległości od punktu $y' \in M'_x$ istniałyby punkty $y \in M_x$. Z definicji rozmaitości topologicznej istnieje otoczenie $U_{y'}$ punktu y' w M oraz homeomorfizm $\Phi_{y'}$ otoczenia $U_{y'}$ na pewien zbiór otwarty $V_{y'}$ w $\mathbb{R}^k$. Rozumując jak w 1°, obierzmy dowolną kulę $K_{y'} \subset V_{y'}$. Wtedy $y' = (\Phi_{y'})_{-1}(K_{y'})$ oraz zbiór $(\Phi_{y'})_{-1}(K_{y'})$ jest otwarty w M . Z istnienia $y \in M_x$ w dowolnej bliskości punktu y' wnosimy, że istnieje $y \in (\Phi_{y'})_{-1}(K_{y'})$. Oznaczając $P' = \Phi_{y'}(y')$, $Q' = \Phi_{y'}(y)$, oznaczamy przez l' obraz odcinka $P'Q'$ przy pomocy odwzorowania $(\Phi_{y'})_{-1}$, a następnie określamy, podobnie jak w 2°, homeomorfizm $\tilde{\Phi}$ przedziału $< 1, 2 >$ na odcinek $P'Q'$ taki, że $\tilde{\Phi}(1) = P'$, $\tilde{\Phi}(2) = Q'$. Odwzorowanie $\tilde{\Psi}$ określone równaniami $\tilde{\Psi}(t) = \Phi(t)$

gdy $t \in]0, 1[$, $\tilde{\Psi}(t) = (\Phi_{y'})_{-1} \circ \tilde{\Phi}(t)$ gdy $t \in]1, 2[$ jest odwzorowaniem ciągłym przedziału $]0, 2[$ łączącym punkty x i y' w ten sposób, że $\tilde{\Psi}(0) = x$, $\tilde{\Psi}(2) = y'$. Przyjmując $\Psi(t) = \tilde{\Psi}(2t)$ dla $t \in]0, 1[$ stwierdzamy, że Ψ jest odwzorowaniem ciągłym przedziału $]0, 1[$ takim, że $\Psi(0) = x$ i $\Psi(1) = y'$. Zatem $y' \in M_x$, wbrew założeniu. Zatem zbiór M'_x jest niepusty i otwarty w M .

4° Jeżeli więc $M_x \neq M$, to istnieją dwa zbiory niepuste i otwarte w M takie, że $M_x \cap M'_x = \emptyset$ oraz $M = M_x \cup M'_x$. To znaczy, że zbiór M jest niespójny wbrew założeniu. W ten sposób wykazaliśmy, że $M_x = M$, zatem spójna rozmaiłość topologiczna M jest zawsze łukowo spójna. ■

W dalszym ciągu potrzebne nam będą rozmaiłości bardziej regularne, niezawierające "kantów" i "ostrzy" (por. Przykład 2.3(i)). Dla ich określenia użyjemy odwzorowań Φ otoczeń $U \subset M$ punktów $x \in M$ na podzbiory otwarte $\mathbb{R}^k$ o znacznie bardziej regularnym charakterze, niż homeomorfizmy użyte do określenia rozmaiłości topologicznej (Definicja 2.1). Będziemy żądać, by odwzorowania Φ były C^∞ -dyfeomorfizmami (krócej: *dyfeomorfizmami*; por. Definicja 4.1(c)). Wygodne teraz okaże się interpretowanie przestrzeni $\mathbb{R}^k$ jako podprzestrzeni $\mathbb{R}^k = \{(x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0) : x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^m$, gdzie $k \leq m$. Zabiegi te doprowadzają do następującej definicji C^∞ -rozmaiłości różniczkowej, którą krócej będziemy w dalszym ciągu nazywali rozmaiłością różniczkową.

Definicja 2.3 Rozmaiłość topologiczną M wymiaru k w $\mathbb{R}^m$ ($0 \leq k \leq m$) nazywamy *rozmaiłością* (C^∞ -*rozmaiłością*) *różniczkową* w $\mathbb{R}^m$ wymiaru k , gdy dla każdego $x \in M$ istnieją zbiory otwarte $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ i $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^m$ oraz C^∞ -dyfeomorfizm $\tilde{\Phi}$ z $\tilde{U}$ do $\tilde{V}$ takie, że $x \in U = \tilde{U} \cap M$ oraz

$$V = \tilde{\Phi}(U) = \tilde{V} \cap \mathbb{R}^k = \{y \in \tilde{V} : y_{k+1} = y_{k+2} = \dots = y_m = 0\}.$$

Odwzorowanie $\Phi : U \rightarrow V$, będące zawężeniem $\tilde{\Phi}$ do zbioru U , tj. $\Phi = \tilde{\Phi}|_U$, nazywamy *mapą różniczkową*, określoną w pewnym otoczeniu punktu $x \in M$.

Definicja 2.4 *Atlasem różniczkowym* (krótko: *atlasem*) rozmaiłości różniczkowej M nazywamy zbiór A map tej rozmaiłości, których dziedziny pokrywają rozmaiłość M . Atlas różniczkowy maksymalny, tj. składający się z wszystkich map rozmaiłości M nazywamy *strukturą różniczkową* rozmaiłości M .

Uwaga 2.3 (a) Porównując Definicje 2.1 i 2.3 zauważamy, że mapa różniczkowa $\Phi : U \rightarrow V$ rozmaitości różniczkowej M jest jednocześnie mapą M jako rozmaitości topologicznej, ponieważ dyfeomorfizm jest zawsze homeomorfizmem.

(b) Mapę różniczkową $\Phi : U \rightarrow V$ oznaczamy także (Φ, U) , gdyż postać zbioru V bywa nieistotna. Podobnie jak w przypadku rozmaitości topologicznej mapa rozmaitości różniczkowej wymiaru k służy do utożsamiania otoczenia dowolnego punktu ze zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^k$. Natomiast warunek $\Phi = \tilde{\Phi}|_U$, gdzie $\tilde{\Phi}$ jest odpowiednim dyfeomorfizmem, gwarantuje, że mapa Φ jest odwzorowaniem bardziej regularnym, niż jest to wymagane dla map rozmaitości topologicznej. Wprowadzenie takiego warunku regularności ogranicza rodzinę rozpatrywanych rozmaitości ale, o czym się wkrótce przekonamy, wzbogaca znacznie ich własności.

(c) Niech M będzie rozmaitością różniczkową i niech $x \in M$. Niech (Φ_1, U_1) i (Φ_2, U_2) będą dwiema mapami takimi, że $x \in U_1 \cap U_2$. To znaczy, że istnieją zbiory otwarte $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2 \subset \mathbb{R}^m$ i $\tilde{V}_1, \tilde{V}_2 \subset \mathbb{R}^m$ oraz dyfeomorfizmy $\tilde{\Phi}_1 : \tilde{U}_1 \rightarrow \tilde{V}_1$ i $\tilde{\Phi}_2 : \tilde{U}_2 \rightarrow \tilde{V}_2$ takie, że $x \in U_1 = \tilde{U}_1 \cap M$, $x \in U_2 = \tilde{U}_2 \cap M$, oraz

$$V_i = \tilde{\Phi}_i(U_i) = \tilde{V}_i \cap M = \{y \in \tilde{V}_i : y_{k+1} = y_{k+2} = \dots = y_m = 0\}$$

dla $i = 1, 2$. Wówczas

$$\tilde{\Phi}_2 \circ (\tilde{\Phi}_1)_{-1} : \tilde{\Phi}_1(\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2) \rightarrow \tilde{\Phi}_2(\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2)$$

jest dyfeomorfizmem w części $\mathbb{R}^m$, jako złożenie dwóch dyfeomorfizmów, zatem

$$\Phi_2 \circ (\Phi_1)_{-1} : \Phi_1(V_1 \cap V_2) \rightarrow \Phi_2(V_1 \cap V_2)$$

jest dyfeomorfizmem w części $\mathbb{R}^k$.

(d) Jeżeli $U \subset M$ jest otwartym niepustym podzbiorem rozmaitości różniczkowej M wymiaru k , to U jest również rozmaitością różniczkową wymiaru k . Prosty dowód tego faktu, wynikający bezpośrednio z definicji rozmaitości pozostawiamy Czytelnikowi.

Przykład 2.3 (a) Niech $M = \mathbb{R}^m$; wiemy już, że M jest rozmaitością topologiczną wymiaru $k = m$ w $\mathbb{R}^m$ (Przykład 2.1(a)), w której $U = \mathbb{R}^m$ jest otoczeniem dowolnego punktu $x \in M$, a odwzorowanie identyczne $\Phi = I$, jest homeomorfizmem U na $V = \mathbb{R}^m$. W Definicji 2.3 mamy $\tilde{U} = U$ i $\tilde{V} = V$. Aby wykazać, że M jest rozmaitością różniczkową wymiaru $k = m$ w $\mathbb{R}^m$ wystarczy zauważyć, że identyczność I jest dyfeomorfizmem. Wiemy jednak, że I jest odwzorowaniem różniczkowalnym w każdym punkcie

$x \in \mathbb{R}^m$ i że jej pochodną liniową jest $DI = E =$ macierz jednostkowa o m wierszach i m kolumnach (II, Część 1, Przykład 1.1). Stąd pochodne cząstkowe rzędów większych niż 1 współrzędnych odwzorowania I istnieją w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}^m$ i są równe 0. Zatem I jest dyfeomorfizmem.

(b) Niech M będzie podzbiorem otwartym niepustym przestrzeni $\mathbb{R}^m$ (Przykład 2.1(b)). Rozumując tak samo, jak w poprzednim przykładzie stwierdzamy, że M jest rozmaiłością różniczkową wymiaru $k = m$ w $\mathbb{R}^m$.

(c) Niech $M = S^1 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ (por. Przykład 2.1(d)); S^1 jest więc okręgiem, czyli sferą jednostkową w $\mathbb{R}^2$. Określamy na S^1 cztery zbiory U_1, U_2, U_3, U_4 otwarte w S^1 i takie, że $S^1 = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4$, a mianowicie:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x_1, x_2) \in S^1 : x_2 > 0\} \quad , \quad U_2 = \{(x_1, x_2) \in S^1 : x_2 < 0\}, \\ U_3 &= \{(x_1, x_2) \in S^1 : x_1 > 0\} \quad , \quad U_4 = \{(x_1, x_2) \in S^1 : x_1 < 0\}. \end{aligned}$$

Każdy z tych zbiorów rozszerzamy odpowiednio do zbiorów $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_3, \tilde{U}_4$ otwartych w $\mathbb{R}^2$, przyjmując przy ustalonych R_1, R_2 takich, że $0 < R_1 < 1 < R_2$:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_i &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : R_1 < x_1^2 + x_2^2 < R_2, \quad x_i > 0\} \quad \text{dla } i = 1, 3, \\ \tilde{U}_i &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : R_1 < x_1^2 + x_2^2 < R_2, \quad x_i < 0\} \quad \text{dla } i = 2, 4. \end{aligned}$$

Pokażemy obecnie konstrukcję zbiorów $V_i, \tilde{V}_i$ oraz odwzorowań $\Phi_i, \tilde{\Phi}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) na przykładzie $i = 1$. Niech

$$\tilde{V}_1 = \{(\varphi, \rho) : R_1 - 1 < \rho < R_2 - 1, 0 < \varphi < \pi\},$$

więc

$$V_1 = \tilde{V}_1 \cap \mathbb{R}^1 = \{(\varphi, 0) : 0 < \varphi < \pi\}.$$

Oznaczmy dla $(x_1, x_2) \in \tilde{U}_1$ i $x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi$

$$\tilde{\Phi}_1(x_1, x_2) = \tilde{\Phi}_1(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = (\varphi, r - 1),$$

wtedy $\tilde{\Phi}_1 : \tilde{U}_1 \rightarrow \tilde{V}_1$ odwzorowuje $\tilde{U}_1$ na $\tilde{V}_1$ wzajemnie jednoznacznie; co więcej, $\tilde{\Phi}_1$ jest dyfeomorfizmem $\tilde{U}_1$ na $\tilde{V}_1$, przeprowadzającym zbiór U_1 na V_1 . Konstrukcje $V_i, \tilde{V}_i, \Phi_i$ oraz $\tilde{\Phi}_i$ dla $i = 2, 3, 4$ pozostawiamy do przeprowadzenia Czytelnikowi. Zatem S^1 jest rozmaiłością różniczkową wymiaru 1 w $\mathbb{R}^2$.

(d) Jak Czytelnik zechce sprawdzić, sfera

$$M = S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

jest rozmaiłością różniczkową wymiaru 2 w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

(e) Niech f będzie funkcją gładką na zbiorze niepustym, otwartym $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Oznaczmy przez M powierzchnię o równaniu $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, tj. $M = \{(x, y, z) : z = f(x, y), (x, y) \in \Omega\}$. Zbiór M nazywamy wówczas *platem powierzchniowym*. Sprawdźmy, że M jest rozmaiłością różniczkową wymiaru 2 w $\mathbb{R}^3$. Zdefiniujemy dla każdego $x = (x_1, x_2, x_3) \in M$ zbiory otwarte $\tilde{U}$ na $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^m$ i dyfeomorfizm $\tilde{\Phi}$ zbioru $\tilde{U}$ na $\tilde{V}$, czyniące zadość Definicji 2.3 rozmaiłości różniczkowej. Niech $x = (x_1, x_2, x_3) \in M$ i niech $x_o = (x_1, x_2, 0) \in \Omega$. Ponieważ zbiór Ω jest otwarty, więc istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że koło K na płaszczyźnie x_1, x_2 w środku w punkcie x_o i o promieniu δ zawiera się w zbiorze Ω . Niech $\tilde{V}$ i $\tilde{U}$ będą zbiorami w $\mathbb{R}^3$ określonymi jak następuje:

$$\begin{aligned}\tilde{V} &= \{v : (v_1, v_2, 0) \in K, |v_3| < 1\}, \\ \tilde{U} &= \{u : (u_1, u_2, 0) \in K, |u_3 - f(u_1, u_2)| < 1\},\end{aligned}$$

gdzie $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$. Oznaczmy przez $\tilde{\Phi}$ odwzorowanie $\tilde{\Phi} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\tilde{\Phi}(u) = v$, określone równaniami

$$\tilde{\Phi} : \begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_2 = u_2 \\ v_3 = u_3 - f(u_1, u_2) \end{cases}$$

dla $u = (u_1, u_2, u_3) \in \tilde{U}$. Sprawdźmy, że $\tilde{\Phi}$ obrazem $\tilde{\Phi}(\tilde{U})$ jest zbiór $\tilde{V}$, przy czym odwzorowanie $\tilde{\Phi}$ jest wzajemnie jednoznaczne. Zauważmy wpraw, że $\tilde{\Phi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$. Jeśli bowiem $u = (u_1, u_2, u_3) \in \tilde{U}$, to $(u_1, u_2, 0) \in K$ i $|u_3 - f(u_1, u_2)| < 1$. Stąd $v = \tilde{\Phi}(u)$ spełnia warunki $(v_1, v_2, 0) \in K$ i $|v_3| = |u_3 - f(u_1, u_2)| < 1$, więc $v \in \tilde{V}$. Zauważmy dalej, że z równań, określających $\tilde{\Phi}$ można wyznaczyć jednocześnie u_1, u_2, u_3 przy pomocy v_1, v_2, v_3 , czyli odwzorowanie $\tilde{\Phi}$ ma odwzorowanie odwrotne $\tilde{\Phi}_{-1} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}$, mamy bowiem $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ i $u_3 = v_3 + f(u_1, u_2) = v_3 + f(v_1, v_2)$:

$$\tilde{\Phi}_{-1} : \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ u_3 = v_3 + f(v_1, v_2) \end{cases}$$

dla $v = (v_1, v_2, v_3) \in \tilde{V}$. Wystarczy sprawdzić, że $\tilde{\Phi}_{-1}$ odwzorowuje $\tilde{V}$ w $\tilde{U}$. Jednak jeśli $v = (v_1, v_2, v_3) \in \tilde{V}$, to $(v_1, v_2, 0) \in K$ i $|v_3| < 1$. Stąd $u = \tilde{\Phi}_{-1}(v)$ spełnia warunki $(u_1, u_2, 0) \in K$ i $|u_3 - f(u_1, u_2)| = |u_3 - f(v_1, v_2)| = |v_3| < 1$

1, więc $u \in \tilde{U}$. Ponieważ funkcja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka, więc jest widoczne, że obydwa odwzorowania $\tilde{\Phi}$ i $\tilde{\Phi}_{-1}$ są gładkie odpowiednio w $\tilde{U}$ i $\tilde{V}$ (Definicja 1.1).

Pozostaje wykazać, że $\tilde{\Phi}(U) = V$. Mamy

$$\begin{aligned} U &= \{u = (u_1, u_2, u_3) : (u_1, u_2, 0) \in K, u_3 = f(u_1, u_2)\}, \\ V &= \{v = (v_1, v_2, v_3) : (v_1, v_2, 0) \in K, v_3 = 0\}. \end{aligned}$$

Gdy $u \in U$, to $\tilde{\Phi}(u) = (u_1, u_2, u_3 - f(u_1, u_2)) = (u_1, u_2, 0) \in V$, bo $u_3 = f(u_1, u_2)$. N odwrót, gdy $v \in V$, to $\tilde{\Phi}_{-1}(v) = (v_1, v_2, v_3 + f(v_1, v_2)) = (v_1, v_2, f(v_1, v_2)) \in U$, bo $v_3 = 0$. Zatem $\tilde{\Phi}(U) = V$. Zawężenie Φ odwzorowania $\tilde{\Phi}$ do zbioru U odwzorowuje wzajemnie jednoznacznie U na V .

(f) Załóżmy, że M jest płatem powierzchniowym w $\mathbb{R}^{n+1}$, tj.

$$M = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) : x_{n+1} = f(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega\},$$

gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem niepustym, otwartym a $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką na Ω . Rozumując analogicznie jak w Przykładzie 2.3(e) można wykazać, że M jest rozmaiłością różniczkową wymiaru n w $\mathbb{R}^{n+1}$.

(g) Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie lokalnie płatem powierzchniowym w $\mathbb{R}^n$, tj. dla każdego $x_o \in M$ istnieje takie otoczenie M_{x_o} punktu x_o w M , że przy pewnym i , ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$\begin{aligned} M_{x_o} &= \{(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) : \\ &\quad x_i = f_i(x_i, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \Omega_i\}, \end{aligned}$$

gdzie $\Omega_i \subset \mathbb{R}^{n-1}$ jest zbiorem niepustym, otwartym, a $f_i : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją gładką na Ω_i . Wtedy, na podstawie Przykładu 2.3(f), M_{x_o} jest rozmaiłością różniczkową wymiaru $n - 1$ w $\mathbb{R}^n$. Stąd wynika, że M jest także rozmaiłością wymiaru $n - 1$ w $\mathbb{R}^n$.

(h) Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ będzie zbiorem otwartym i niepustym i niech $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją gładką w Ω . Oznaczmy

$$F(x) = F(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) - c,$$

gdzie $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \Omega$ i $c \in \mathbb{R}$. Niech

$$M_c = f_{-1}(\{c\}).$$

Założmy, $M_c \neq \emptyset$ oraz, że dla każdego $x \in M_c$ gradient

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x), \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x) \right) \neq 0.$$

Wykażemy, że M_c jest rozmaiłością różniczkową wymiaru n w $\mathbb{R}^{n+1}$.

Niech $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, x_{n+1}^0) \in M_c$ będzie dowolne. Ponieważ $\nabla f(x_0) \neq 0$, więc istnieje wskaźnik i taki, że $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \neq 0$. Bez zmniejszania ogólności rozumowania możemy przypuścić, że $i = n + 1$, więc $\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x_0) \neq 0$. Zauważmy, że warunek $x_0 \in M_c$ jest równoważny warunkowi $F(x_0) = F(x_1^0, \dots, x_n^0, x_{n+1}^0) = 0$. Chcemy rozwikłać funkcję $F(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ względem zmiennej x_{n+1} w pewnym otoczeniu punktu x_0 . Oznaczmy $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\tilde{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. Zastosujemy twierdzenie o odwzorowaniu uwikłanym (II, Część 1, Twierdzenie 1.22) dla odwzorowania $F(\tilde{x}, x_{n+1})$. Niech $D_{(1)}F(\tilde{x}_0, x_{n+1}^0)$ oznacza pochodną odwzorowania $x \mapsto F(x, x_{n+1}^0)$ w punkcie $\tilde{x}_0$, a $D_{(2)}F(\tilde{x}_0, x_{n+1}^0)$ pochodną odwzorowania $y \mapsto F(\tilde{x}_0, y)$ w punkcie x_{n+1}^0 . W naszym przypadku twierdzenie to orzeka, że jeśli spełnione są następujące trzy warunki:

$$1^\circ F(\tilde{x}_0, x_{n+1}^0) = 0,$$

$2^\circ F$ jest różniczkowalna w sposób ciągły w pewnym otoczeniu punktu x_0 ,

$$3^\circ D_{(2)}F(\tilde{x}_0, x_{n+1}^0) \neq 0,$$

to lokalnie w pewnym otoczeniu punktu x_0 , warunek

$$F(x) = F(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$$

jest równoważny warunkowi $x_{n+1} = \Phi(x_1, \dots, x_n) = \Phi(\tilde{x})$ przy pewnej funkcji Φ ciągłej i mającej pochodne cząstkowe pierwszego rzędu ciągle w otoczeniu x_0 , a nadto pochodna liniowa $D\Phi(x)$ spełnia wewnątrz tego otoczenia równość

$$D\Phi(x) = -[D_{(2)}F(\tilde{x}, x_{n+1})]^{-1}[D_{(1)}F(\tilde{x}, x_{n+1})].$$

Sprawdźmy, czy spełnione są założenia $1^\circ - 3^\circ$. Założenie 1° jest równoważne równości $F(x_0) = 0$, czyli $x_0 \in M_c$. Założenie 2° spełnione jest ze względu na gładkość f , więc także F w Ω . Wreszcie

$$\begin{aligned} D_{(2)}F(\tilde{x}_0, x_{n+1}^0) &= \frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(\tilde{x}_0, \Phi(x_0)) = \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(\tilde{x}_0, \Phi(x_0)) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x_0) \neq 0, \end{aligned}$$

zatem spełnione jest także założenie 3° . Funkcja $D\Phi(x)$ istnieje więc w pewnym otoczeniu U_{x_0} punktu x_0 , a ponieważ

$$D_{(1)}F(\tilde{x}, x_{n+1}) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x) \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{x}, \Phi(\tilde{x})), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\tilde{x}, \Phi(\tilde{x})) \right),$$

więc

$$D\Phi(x) = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x)} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{x}, \Phi(\tilde{x})), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\tilde{x}, \Phi(\tilde{x})) \right)$$

czyli

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\tilde{x}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{x}, \Phi(\tilde{x}))}{\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(\tilde{x}, \Phi(\tilde{x}))} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

w pewnym otoczeniu U_{x_o} punktu $\tilde{x}_o = (\tilde{x}_o, \dots, \tilde{x}_n)$.

Niech j będzie dowolnym ze wskaźników $1, 2, \dots, n$. Zauważmy, że prawa strona równości (2.1) ma ciągłą pochodną w U_{x_o} , bo funkcja f jest gładka w Ω , a funkcja Φ jest różniczkowalna w sposób ciągły w U_{x_o} . Zatem lewa strona (2.1) jest różniczkowalna w sposób ciągły w U_{x_o} oraz

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_i}(\tilde{x}) = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{x}, \Phi(\tilde{x}))}{\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(\tilde{x}, \Phi(\tilde{x}))} \right). \quad (2.2)$$

Stosując regułę łańcuchową Leibniza (II, Część 1, Twierdzenie 1.11) otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{x}, \Phi(\tilde{x})) \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\tilde{x}, \Phi(\tilde{x})) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n+1} \partial x_i}(\tilde{x}, \Phi(\tilde{x})) \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(\tilde{x}), \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(\tilde{x}, \Phi(\tilde{x})) \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_{n+1}}(\tilde{x}, \Phi(\tilde{x})) \end{aligned}$$

dla $i, j = 1, 2, \dots, n$. Stąd, stosując równości (2.2) i (2.1) oraz wzór na pochodną ilorazu możemy stwierdzić bez trudu, że $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_i}(\tilde{x})$ istnieje i jest ciągłą w U_{x_o} ; Czytelnik zechce indywidualnie uzupełnić rachunki.

Stosując postępowanie indukcyjne można wykazać, że funkcja Φ ma w U_{x_o} ciągle pochodne wszystkich rzędów, więc jest gładka w U_{x_o} .

Wróćmy jeszcze do założenia $\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x_o) \neq 0$. Można ją zastąpić którymkolwiek z założeń $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o) \neq 0$ przy $i = 1, 2, \dots, n$, określając odpowiednio funkcję Φ_i w miejsce funkcji Φ . Zatem M_c jest sumą skończonej liczby płatów powierzchniowych. Na podstawie Przykładu 2.3(g), M_c jest rozmaitością różniczkową wymiaru n w $\mathbb{R}^{n+1}$.

(i) Za koniec podamy prosty przykład rozmaitości topologicznej która nie jest rozmaitością różniczkową w $\mathbb{R}^2$. Niech M będzie brzegiem kwadratu w $\mathbb{R}^2$:

$$M = \left\{ (x_1, x_2) : (x_1, x_2) = (\pm 1, s) \text{ lub } (x_1, x_2) = (s, \pm 1), -1 \leq s \leq 1 \right\}.$$

Pozostawiamy Czytelnikowi wykazanie, że M jest rozmaitością topologiczną wymiaru 1 w $\mathbb{R}^2$. Wykażemy nie wprost, że M nie jest rozmaitością różniczkową. Gdyby M było rozmaitością różniczkową to istniała by mapa różniczkowa (Φ, U) w otoczeniu punktu $(1, 1) \in M$. Niech $\tilde{\Phi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ będzie dyfeomorfizmem wyznaczającym tę mapę. Możemy założyć, że $\tilde{\Phi}(1, 1) = \Phi(1, 1) = (0, 0)$. Niech $\tilde{\Phi}_{-1} = (\varphi_1, \varphi_2)$ będą odwzorowaniami współrzędnymi dyfeomorfizmu $\tilde{\Phi}_{-1}$. Punkty $(t, 0) \in V$ są odwzorowywane przy pomocy $\tilde{\Phi}_{-1}$ na pewne otoczenie punktu $(1, 1)$ w M , więc funkcja φ_1 musi przyjmować stałą wartość równą 1 na prawo lub lewo od $(0, 0)$ w V . Zatem $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(0, 0) = 0$. Analogiczne własności ma funkcja φ_2 , więc również $\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(0, 0) = 0$. W konsekwencji jacobian odwzorowania $\tilde{\Phi}_{-1}$ w punkcie $(0, 0)$ jest równy zeru. To przeczy temu, że $\tilde{\Phi}_{-1}$ jest dyfeomorfizmem.

2.2 Rozmaitości różniczkowe z brzegiem

Sformułowanie ogólnego twierdzenia Stokesa wymaga użycia odpowiedniej klasy zbiorów, które zawierają swoje punkty brzegowe. W tym celu wprowadzimy rozmaitości różniczkowe z brzegiem. Zanim podamy definicję przyjdźmy się kilku przykładom.

Przykład 2.4 (a) Widzieliśmy w Przykładzie 2.3(b), że dowolny niepusty zbiór otwarty $M \subset \mathbb{R}^m$ jest rozmaitością różniczkową wymiaru m w $\mathbb{R}^m$. W szczególności przedział otwarty (a, b) jest rozmaitością różniczkową wymiaru 1 w $\mathbb{R}$. Powstaje pytanie, czy także przedział domknięty $[a, b]$ jest rozmaitością różniczkową wymiaru 1 w $\mathbb{R}$. Przypuśćmy, że odpowiedź na to pytanie jest pozytywna, więc dla każdego $x \in [a, b]$ istnieją zbiory otwarte $\tilde{U}, \tilde{V} \subset \mathbb{R}$ i dyfeomorfizm $\tilde{\Phi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ takie, że $x \in U = \tilde{U} \cap [a, b]$ oraz $V = \tilde{\Phi}(U) = \tilde{V} \cap \mathbb{R} = \tilde{V}$. Weźmy w szczególności $x = a$. Wtedy $a \in U$, ale a nie jest punktem wewnętrznym punktu zbioru U , zatem zbiór U nie jest otwarty w $\mathbb{R}$. Z drugiej strony, U jest przeciwobrazem zbioru $\tilde{V}$, otwartego w $\mathbb{R}$, a ponieważ dyfeomorfizm $\tilde{\Phi}$ jest odwzorowaniem ciągłym, więc U jest otwarty w $\mathbb{R}$ (I, Część 1, Twierdzenie 5.30). Otrzymaliśmy więc sprzeczność. Wykazaliśmy w ten sposób, że przedział $[a, b]$ nie jest rozmaitością różniczkową w $\mathbb{R}$.

(b) Niech $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ będzie domkniętym kołem jednostkowym na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Rozpatrzmy punkt $(-1, 0) \in M$. Gdyby M był rozmaitością różniczkową wymiaru 2 w $\mathbb{R}^2$, to w szczególności istniałyby zbiory otwarte $\tilde{U}, \tilde{V} \subset \mathbb{R}^2$ i dyfeomorfizm $\tilde{\Phi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$, takie, że $(-1, 0) \in U = \tilde{U} \cap M$ oraz $V = \tilde{\Phi}(U) = \tilde{V} \cap \mathbb{R}^2 = \tilde{V}$. Przeciwobraz U

zbioru otwartego $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^2$ przy pomocy dyfeomorfizmu (więc odwzorowania ciągłego) $\tilde{\Phi}$ nie byłby zbiorem otwartym, co daje sprzeczność, podobnie jak w Przykładzie 2.4 (a).

Na Przykładach 2.4 (a),(b) widać, że te zbiory nie są rozmaitościami różniczkowalnymi, co spowodowane jest przez punkty brzegowe tych zbiorów. Aby włączyć takie zbiory do naszych rozważań zmodyfikujemy pojęcie rozmaitości różniczkowych, wprowadzając tzw. rozmaitości z brzegiem. Wprowadzenie tego pojęcia poprzedzimy definicją, odnoszącą się do różniczkowalności w przypadku, gdy metrykę w $\mathbb{R}^k$ zastąpimy metryką zawężoną do pewnego podzbioru A przestrzeni $\mathbb{R}^k$.

Niech $\langle X, \rho \rangle$ będzie przestrzenią metryczną i niech $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Przypomnijmy, że wówczas odległość (metrykę) ρ zawężoną do przestrzeni metrycznej $\langle A, \rho \rangle$ nazywamy *odległością (metryką) w A , indukowaną przez $\langle X, \rho \rangle$* (Uwaga 1.1(a)). Gdy np. w przestrzeni $\mathbb{R}$ z odległością euklidesową ρ oznaczyć $A = \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$, to w przestrzeni $\langle A, \rho \rangle$ przedział $A = \langle a, b \rangle$ jest zbiorem otwartym w metryce indukowanej ρ w przestrzeni $\langle A, \rho \rangle$.

Oznaczmy

$$\mathbb{R}_-^m = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) : x_1 \leq 0\},$$

gdzie $m = 1, 2, \dots$. Zbiór $\mathbb{R}_-^m$ jest domkniętym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^m$ z odległością euklidesową, a jego brzeg (topologiczny) $\text{Fr } \mathbb{R}_-^m$ (II, Część 1, dowód Twierdzenia 4.4) jest równy $\text{Fr } \mathbb{R}_-^m = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) : x_1 = 0\}$. W dalszym ciągu wprowadzimy nieco inne pojęcie brzegu, dlatego brzeg Fr będziemy nazywać brzegiem topologicznym. Przypomnijmy, że $\text{Fr } A = \overline{A \cap \mathbb{R}^m} \setminus A$, gdzie A jest podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^m$, a kreska u góry oznacza domknięcie zbioru w $\mathbb{R}^m$.

Definicja 2.5 Niech $U \subset \mathbb{R}_-^m$, $U \neq \emptyset$ i niech U będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{R}_-^m$ w metryce, indukowanej w $\mathbb{R}_-^m$ przez $\mathbb{R}^m$. Zbiór $\partial U = U \cap \text{Fr } \mathbb{R}_-^m$ nazywamy *brzegiem zbioru U* , a elementy $x \in \partial U$ nazywamy *punktami brzegowymi zbioru U* .

Uwaga 2.4 (a) Zbiór U jako zbiór otwarty w przestrzeni $\mathbb{R}_-^m$ nie zawiera punktów swojego brzegu topologicznego określonego w tej przestrzeni. Z drugiej strony brzeg ∂U jest częścią brzegu topologicznego $\text{Fr } U$ zbioru U w przestrzeni $\mathbb{R}^m$. Jeśli $U = \mathbb{R}_-^m$ to

$$\partial U = \partial \mathbb{R}_-^m = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) : x_1 = 0\} = \text{Fr } \mathbb{R}_-^m.$$

(b) Zbiory otwarte w $\mathbb{R}_-^m$ można podzielić na dwie klasy. Jeżeli U jest otwarty w $\mathbb{R}_-^m$ i $\partial U = \emptyset$ to zbiór U jest również zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^m$. Do drugiej klasy zaliczamy te zbiory otwarte w $\mathbb{R}_-^m$, których brzeg ∂U nie jest pusty. Nie są one otwarte w $\mathbb{R}^m$. Takie rozszerzenie rodziny zbiorów otwartych pozwoli nam określić rozmaitość z brzegiem.

Definicja 2.6 Zbiór $M \subset \mathbb{R}^m$ nazywamy *rozmaitością* (C^∞ -*rozmaitością*) *różniczkową wymiaru k z brzegiem* w $\mathbb{R}^m$ ($1 \leq k \leq m$), gdy dla każdego $x \in M$ istnieją zbiory $\tilde{U}, \tilde{V}$ otwarte w $\mathbb{R}^m$ oraz C^∞ -dyfeomorfizm $\tilde{\Phi}$ z $\tilde{U}$ do $\tilde{V}$ takie, że $x \in U = \tilde{U} \cap M$ oraz

$$V = \tilde{\Phi}(U) = \{y \in \tilde{V} : y_{k+1} = y_{k+2} = \dots = y_m = 0\}$$

jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}_-^k$ w metryce, indukowanej przez $\mathbb{R}^k$. Odwzorowanie $\Phi : U \rightarrow V$, będące zawężeniem $\tilde{\Phi}$ do zbioru U nazywamy *mapą różniczkową* określoną w pewnym otoczeniu punktu $x \in M$.

Uwaga 2.5 Niech M będzie rozmaitością różniczkową wymiaru k . Niech $x \in M$ będzie dowolnym punktem tej rozmaitości a (Φ, U) mapą określoną w otoczeniu tego punktu, tzn. $x \in U$. Możemy założyć, składając ewentualnie mapę Φ z pewną translacją, że $\Phi(x)$ jest elementem wnętrza $\text{Int } \mathbb{R}_-^k$ zbioru $\mathbb{R}_-^k$. Niech $V = \Phi_{-1}(U \cap \text{Int } \mathbb{R}_-^k)$. Wówczas (Φ, V) jest mapą spełniającą warunki Definicji 2.6. Zatem każda rozmaitość różniczkowa jest rozmaitością różniczkową z brzegiem.

Definicja 2.7 Niech M będzie rozmaitością różniczkową z brzegiem.

(a) Punkt $x \in M$ nazywamy *punktem wewnętrznym* rozmaitości M , gdy $\tilde{U}, \tilde{V}$ i $\tilde{\Phi}$ można tak dobrać, by zbiór $V = \tilde{\Phi}(U)$ był otwarty w $\mathbb{R}^k$. Zbiór punktów wewnętrznych rozmaitości M z brzegiem oznaczamy będziemy M^o .

(b) Punkt $x \in M$ nazywamy *punktem brzegowym* rozmaitości M , gdy nie jest jej punktem wewnętrznym. Zbiór ∂M wszystkich punktów brzegowych rozmaitości M nazywamy *brzegiem rozmaitości M* .

Uwaga 2.6 (a) Z Definicji 2.7 wynika natychmiast, że zbiór M^o nigdy nie jest pusty. Jeżeli bowiem (Φ, U) jest dowolną mapą rozmaitości M z brzegiem to zbiór $V = \Phi(U) \cap \text{Int } \mathbb{R}_-^k$ nie jest pusty i $\Phi_{-1}(V) \subset M^o$.

(b) Należy zwrócić uwagę na to, że M^o nie jest wnętrzem zbioru M w przestrzeni $\mathbb{R}^m$ w sensie topologicznym. Jeżeli $1 \leq k < m$ to wnętrze $\text{Int } M$ zbioru M w $\mathbb{R}^m$ jest w przeciwieństwie do M^o , zbiorem pustym.

(c) Z Definicji 2.7 i Uwagi 2.7 wynika natychmiast, że rozmaićość różniczkowa M wymiaru k to taka rozmaićość różniczkowa wymiaru k z brzegiem, której brzeg ∂M jest zbiorem pustym. Innymi słowy wszystkie punkty takiej rozmaićości są jej punktami wewnętrznymi.

(d) Podobnie jak w przypadku rozmaićości (bez brzegu), każdą rodzinę map, których dziedziny pokrywają rozmaićość z brzegiem M nazywamy *atlasem rozmaićości z brzegiem M* .

Przykład 2.5 (a) Wróćmy do Przykładu 2.4(a). Sprawdzimy, że przedział domknięty w $\mathbb{R}$ jest rozmaićością różniczkową wymiaru 1, z brzegiem, w $\mathbb{R}$. Ograniczymy się przy tym do przedziału $M =]0, 1[$. Rozpatrzmy następujące zbiory: $\tilde{U}_1 = (0, 1)$, $\tilde{U}_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\tilde{U}_3 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ pokrywające przedział M . Odpowiadają im zbiory $U_1 = \tilde{U}_1 \cap M = (0, 1)$, $U_2 = \tilde{U}_2 \cap M =]0, \frac{1}{2}[$ oraz $U_3 = \tilde{U}_3 \cap M = (\frac{1}{2}, 1)$. Określmy dyfeomorfizmy $\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2$ i $\tilde{\Phi}_3$ równościami

$$\tilde{\Phi}_1(x) = x - 1, \quad \tilde{\Phi}_2(x) = -x, \quad \text{ i } \quad \tilde{\Phi}_3(x) = x - 1$$

dla $x \in \mathbb{R}$ i niech $\tilde{V}_i$ dla $i = 1, 2, 3$. Wtedy $\tilde{V}_1 = (-1, 0)$, $\tilde{V}_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\tilde{V}_3 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ i dyfeomorfizm $\tilde{\Phi}_i$ przekształca więc $\tilde{V}_i$ w V_i , $i = 1, 2, 3$. Ponadto mamy $V_i = \tilde{\Phi}_i(U_i)$, więc $V_1 = (-1, 0)$, $V_2 = V_3 = (-\frac{1}{2}, 0[$. Zbiór V_1 jest otwarty w $\mathbb{R}$, a zbiory V_2 i V_3 są otwarte w $\mathbb{R}_- = \{x : x \leq 0\}$ w metryce indukowanej przez $\mathbb{R}$. Zatem $M =]0, 1[$ jest rozmaićością różniczkową z brzegiem, wymiaru 1, w $\mathbb{R}$. Co więcej, z naszych rachunków wynika, że punkty wewnętrzne przedziału $]0, 1[$ są punktami wewnętrznymi rozmaićości M , a $\partial M = \{0, 1\}$, czyli składa się z punktów 0 i 1. Atlas $\mathcal{A}$ składa się z trzech map: $\Phi_i : U_i \rightarrow V_i$, $i = 1, 2, 3$.

(b) Rozpatrzmy domkniętą półsferę $M = S_-^2$ w $\mathbb{R}^3$ określoną równościami $S_-^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_1 \leq 0\}$. Jak wiemy (Przykład 2.3(d)), cała sfera S^2 jest rozmaićością różniczkową wymiaru 2 w $\mathbb{R}^3$. Także półsfera bez brzegu, czyli $\{x = (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_1 < 0\}$, jest rozmaićością różniczkową wymiaru 2 w $\mathbb{R}^3$, bo jest płatem powierzchniowym o równaniu $x_1 = -\sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2}$, gdzie $x_2^2 + x_3^2 < 1$ (Przykład 2.3(e)). To znaczy, że jeżeli $x = (x_1, x_2, x_3) \in M = S_-^2$ i dodatkowo wiemy, że $x_1 < 0$, to spełnione są warunki Definicji 2.3, a tym samym także Definicji 2.6. Wystarczy więc wykazać, że warunki Definicji 2.6 spełnione są w zbiorze tych $x = (x_1, x_2, x_3) \in S_-^2$, dla których $x_1 = 0$; zbiór ten oznaczamy S_1^1 ; wiemy, że S_1^1 jest rozmaićością różniczkową wymiaru 1 na płaszczyźnie $x_1 = 0$ (Przykład 2.3).

Punkty $x_0 \in S_1^1$ są postaci $x_0 = (0, x_2^0, x_3^0)$, gdzie $(x_2^0)^2 + (x_3^0)^2 = 1$. Dla każdego z nich istnieje kąt ψ_0 taki, że $x_2^0 = \cos \psi_0$, $x_3^0 = \sin \psi_0$. Załóżmy dodatkowo, że $x_2^0 > 0$ i $x_3^0 > 0$, wtedy kąt ψ_0 spełnia nierówności $0 < \psi_0 < \frac{\pi}{2}$. Niech $0 < R_1 < 1 < R_2$ i niech B_{R_1} i B_{R_2} oznaczają kule o środku w początku układu współrzędnych $0 = (0, 0, 0)$ i o promieniach odpowiednio R_1 i R_2 . Niech B_{R_1, R_2}^0 oznacza wnętrze ich różnicy $B_{R_2} \setminus B_{R_1}$. Bryła B_{R_1, R_2}^0 jest zbiorem punktów $x = (x_1, x_2, x_3)$ spełniających równania

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin \varphi \cos \psi \\ x_2 &= r \cos \varphi \cos \psi \\ x_3 &= r \sin \psi, \end{aligned} \tag{2.3}$$

gdzie $-\pi \leq \varphi < \pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$, $R_1 < r < R_2$. Ze zbioru B_{R_1, R_2}^0 wycinamy bryłę $\tilde{U}$ warunkami $-\epsilon < \varphi < \epsilon$, $\psi_0 - \epsilon < \psi < \psi_0 + \epsilon$, $R_1 < r < R_2$, gdzie $\epsilon > 0$ jest tak małe, by $0 < \psi_0 - \epsilon$ i $\psi_0 + \epsilon < \frac{\pi}{2}$. Niech

$$\tilde{V} = (R_1, R_2) \times (-\epsilon, \epsilon) \times (\psi_0 - \epsilon, \psi_0 + \epsilon).$$

W zbiorze $\tilde{V}$ określamy odwzorowanie $\tilde{\Phi}_{-1}$ wzorami (2.3). Zatem $\tilde{\Phi}_{-1}$ odwzorowuje $\tilde{V}$ na $\tilde{U}$ wzajemnie jednoznacznie. Co więcej $\tilde{\Phi}_{-1}$ jest dyfeomorfizmem $\tilde{V}$ na $\tilde{U}$, a odwzorowanie $\tilde{\Phi}$, odwrotne do $\tilde{\Phi}_{-1}$, jest dyfeomorfizmem $\tilde{U}$ na $\tilde{V}$. Niech $U = \tilde{U} \cap S_-^2$, czyli

$$\begin{aligned} U &= \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_1 = \sin \varphi \cos \psi, x_2 = \cos \varphi \cos \psi, x_3 = \sin \psi, \\ &\text{gdzie } -\epsilon \leq \psi \leq 0 \text{ i } \psi_0 - \epsilon < \psi < \psi_0 + \epsilon\}. \end{aligned}$$

Wówczas

$$\begin{aligned} V &= \Phi(U) = \tilde{\Phi}(U) = \{(\varphi, \psi, r) : -\epsilon < \varphi \leq 0, \psi_0 - \epsilon < \psi < \psi_0 + \epsilon, r = 1\} \\ &= (-\epsilon, 0] \times (\psi_0 - \epsilon, \psi_0 + \epsilon) \times \{1\}. \end{aligned}$$

Zbiór V jest otwarty w $\mathbb{R}_-^2$ w metryce indukowanej przez $\mathbb{R}^2$. Zatem x_o spełnia warunki Definicji 2.6. Czytelnik zechce uzupełnić to rozumowanie, uwalniając się od założenia, że $x_2^0 > 0$ i $x_3^0 > 0$. Zechce także zauważyć, że punkty $x_0 \in S_1^1$ należą do brzegu rozmaitości różniczkowej z brzegiem S_-^2 , czyli że $S_1^1 = \partial S_-^2$.

(c) Walec C (cylinder) w $\mathbb{R}^3$, to powierzchnia

$$C = \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 = 1, -1 \leq x_3 \leq 1\} = S^1 \times]-1, 1[,$$

składającą się z dwóch części: powierzchni $C_o = \{x : x_1^2 + x_2^2 = 1, -1 < x_3 < 1\}$ oraz okręgów $S_1 = \{x : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 1\}$ i $S_{-1} = \{x : x_1^2 + x_2^2 =$

$1, x_3 = -1\}$. Pokażemy wpierw, że C_o jest rozmaitością różniczkową wymiaru 2 w $\mathbb{R}^3$. Walec C jest iloczynem kartezjańskim przedziału $< -1, 1 >$ i okręgu S^1 , dlatego konstruując atlas wykorzystamy Przykład 2.3 (c).

Niech $0 < R_1 < 1 < R_2$ and $\varepsilon > 0$. Określimy najpierw cztery zbiory $\widetilde{U}_1, \widetilde{U}_2, \widetilde{U}_3, \widetilde{U}_4$ otwarte w $\mathbb{R}^3$ przyjmując:

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : R_1 < x_1^2 + x_2^2 < R_2, -\frac{1}{2} < x_3 < 1 + \varepsilon, x_1 > 0\} \\ \widetilde{U}_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : R_1 < x_1^2 + x_2^2 < R_2, -\frac{1}{2} < x_3 < 1 + \varepsilon, x_1 < 0\} \\ \widetilde{U}_3 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : R_1 < x_1^2 + x_2^2 < R_2, -\frac{1}{2} < x_3 < 1 + \varepsilon, x_2 > 0\} \\ \widetilde{U}_4 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : R_1 < x_1^2 + x_2^2 < R_2, -\frac{1}{2} < x_3 < 1 + \varepsilon, x_2 < 0\}.\end{aligned}$$

Niech $U_i = C \cap \widetilde{U}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Określimy teraz dyfeomorfizm $\widetilde{\Phi}_1$ zbioru $\widetilde{U}_1$ na zbiór

$$\widetilde{V}_1 = \{(\delta, \varphi, \rho) \in \mathbb{R}^3 : -\frac{3}{2} < \delta < \varepsilon, R_1 < \rho < R_2, -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}\}.$$

wzorem

$$\widetilde{\Phi}_1(x_1, x_2, x_3) = \widetilde{\Phi}_1(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, x_3) = (x_3 - 1, \varphi, \rho - 1).$$

Wtedy $\widetilde{\Phi}_1$ jest dyfeomorfizmem $\widetilde{U}_1$ onto $\widetilde{V}_1$ takim, że

$$V_1 = \widetilde{\Phi}_1(U_1) = \{(\delta, \varphi, 0) \in \mathbb{R}^3 : -\frac{3}{2} < \delta < \varepsilon, -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}\}$$

oraz

$$\widetilde{\Phi}_1(U_1 \cap S_1) = \{(0, \varphi, 0) \in \mathbb{R}^3 : -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}\}.$$

Podobnie zmieniając przedział określoności zmiennej φ definiujemy zbiory $\widetilde{V}_i, V_i$ i dyfeomorfizmy $\widetilde{\Phi}_i$, $i = 2, 3, 4$.

Następnie określamy zbiory $\widetilde{U}_i, \widetilde{V}_i$, oraz dyfeomorfizmy $\widetilde{\Phi}_i$, $i = 5, 6, 7, 8$, związane ze zbiorem C_{-1} . Dla przykładu opiszemy dyfeomorfizm $\widetilde{\Phi}_5$, pozostałe określamy analogicznie. Przyjmiemy

$$\begin{aligned}\widetilde{U}_5 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : R_1 < x_1^2 + x_2^2 < R_2, -1 - \varepsilon < x_3 < -\frac{1}{2}, x_1 > 0\}, \\ \widetilde{\Phi}_5(x_1, x_2, x_3) &= \widetilde{\Phi}_1(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, x_3) = (1 - x_3, \varphi, \rho - 1),\end{aligned}$$

oraz $\widetilde{V}_5 = \widetilde{V}_1$, $U_5 = \widetilde{U}_5 \cap C$. Wówczas $V_1 = \widetilde{\Phi}_1(U_1) \subset \mathbb{R}_-^2$ oraz $\widetilde{\Phi}_5(U_5 \cap S_{-1}) = \widetilde{\Phi}_1(U_1 \cap S_1)$.

Rodzina map $\{(\Phi_i, U_i)\}_{i=1,\dots,8}$, jest atlasem rozmaitości z brzegiem C . Przyjmując w definicji zbiorów $\widetilde{U}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, nierówność $-\frac{1}{2} < x_3 < 1$ zamiast $-\frac{1}{2} < x_3 < 1 + \varepsilon$, a w definicji zbiorów $\widetilde{U}_i$, $i = 5, 6, 7, 8$, nierówność $-1 < x_3 < \frac{1}{2}$ zamiast $-1 - \varepsilon < x_3 < \frac{1}{2}$ stwierdzamy łatwo, że każdy punkt $X \in C_o$ jest punktem wewnętrznym rozmaitości C . Z konstrukcji wynika zatem, że $\partial C = C_1 \cup C_{-1}$.

Twierdzenie 2.3 (o brzegu rozmaitości) *Niech M będzie rozmaitością różniczkową wymiaru k z brzegiem. Wówczas:*

- (a) *zbiór punktów wewnętrznych M^o jest rozmaitością różniczkową (bez brzegu) wymiaru k ,*
- (b) *jeżeli brzeg ∂M nie jest zbiorem pustym to jest rozmaitością różniczkową (bez brzegu) wymiaru $k - 1$,*
- (c) *rozmaitość M jest sumą rozłączną M^o i ∂M t.zn.*

$$M = M^o \cup \partial M \quad \text{ i } \quad M^o \cap \partial M = \emptyset.$$

Dowód. Punkt (a) i (c) wynikają wprost z Definicji 2.7 i Uwagi 2.6. Wykażemy punkt (b). Niech x będzie elementem brzegu ∂M . Z definicji istnieje mapa (Φ, U) rozmaitości M taka, że $x \in U$. Niech $\tilde{\Phi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ będzie dyfeomorfizmem definiującym mapę $\Phi : U \rightarrow V$. Ponieważ $x \in \partial M$, więc $\Phi(x) \in \partial \mathbb{R}^k_-$. W przeciwnym razie zawężając dziedzinę U mapy Φ otrzymalibyśmy zbiór $\Phi(U)$ otwarty w $\mathbb{R}^k$, więc x nie byłby punktem brzegowym. Pokażemy, że

$$\Phi(U \cap \partial M) = \Phi(U) \cap \partial \mathbb{R}^k_- \subset \mathbb{R}^{k-1} = \{(x_1, \dots, x_k) : x_1 = 0\}.$$

Niech $y \in U \cap \partial M$. Wówczas $\Phi(y) \in \Phi(U)$. Gdyby $\Phi(y) \notin \partial \mathbb{R}^k_-$, to możnaby zawęzić dziedzinę U mapy Φ do zbioru U_0 takiego, że $y \in U_0$ i $\Phi(U_0)$ byłby zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^k$. To przeczy jednak temu, że $y \in \partial M$. Zatem $\Phi(U \cap \partial M) \subset \Phi(U) \cap \partial \mathbb{R}^k_-$.

Niech $\xi \in \Phi(U) \cap \partial \mathbb{R}^k_-$. Wówczas istnieje $y \in U$ takie, że $\Phi(y) = \xi$. Przypuśćmy, że $y \in U \setminus \partial M$. Wówczas istnieje mapa $\Phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ taka, że $y \in U_1$ i V_1 jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^k$. Zbiór $U_2 = U \cap U_1$ jest niepustym zbiorem otwartym w M . Odwzorowanie

$$\Phi \circ (\Phi_1)_{-1} : \Phi_1(U_2) \rightarrow \Phi(U_2)$$

jest homeomorfizmem, a zbiór $\Phi_1(U_2) \subset V_1$ jest otwarty w $\mathbb{R}^k$, więc otwarty w $\mathbb{R}^k$ jest również zbiór $\Phi(U_2)$. Ale $\Phi(U_2) \subset \mathbb{R}^k_-$, więc $\Phi(U_2) \cap \partial \mathbb{R}^k_- = \emptyset$, co przeczy temu, że $\Phi(y) \in \partial \mathbb{R}^k_-$. Zatem nie może być $y \in U \setminus \partial M$, czyli zachodzi $y \in \partial M$, a ponadto $\Phi(U \cap \partial M) = \Phi(U) \cap \partial \mathbb{R}^k_- \subset \mathbb{R}^{k-1}$.

Niech $\Psi = \Phi|_{U \cap \partial M}$. Wprost z definicji mamy

$$\Psi = \Phi|_{U \cap \partial M} = \tilde{\Phi}|_{\partial M}.$$

Zatem

$$\Psi : U \cap \partial M \rightarrow \Phi(U) \cap \partial \mathbb{R}_-^k \subset \mathbb{R}^{k-1}$$

jest mapą różniczkową określoną w otoczeniu punktu x . Punkt x był dowolnie dobranym punktem zbioru ∂M . Dowiedliśmy więc, że ∂M jest rozmaitością wymiaru $k - 1$ (bez brzegu). ■

2.3 Funkcje gładkie na rozmaitości różniczkowej

Zajmiemy się obecnie przeniesieniem pewnych pojęć, dotyczących funkcji i odwzorowań gładkich $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ i $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ z przypadku, gdy U jest otwartym i niepustym zbiorem w $\mathbb{R}^m$ (por. § 4.3) na przypadek, gdy f jest określona na rozmaitości różniczkowej M wymiaru k w $\mathbb{R}^m$, tj. gdy $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ i $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ograniczymy się do rozmaitości bez brzegu, jest to wystarczające, bo każda rozmaitość z niepustym brzegiem jest sumą rozłączną dwóch rozmaitości bez brzegu (por. Twierzenie 2.3). Gładkość funkcji $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ określamy jako gładkość złożenia $f \circ \Phi_{-1} : \Phi(U) \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie (Φ, U) jest mapą różniczkową, określoną w otoczeniu U punktu $x \in M$.

Definicja 2.8 (a) Funkcję $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie M jest rozmaitością różniczkową wymiaru k w $\mathbb{R}^m$, nazywamy *gładką*, gdy dla każdego punktu $x \in M$ istnieje taka mapa różniczkowa (Φ, U) , że funkcja $f \circ \Phi_{-1} : \Phi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka w $\Phi(U) \subset \mathbb{R}^k$, tj. $f \circ \Phi_{-1} \in C^\infty(\Phi(U))$. Jeżeli ponadto $f(x) = 0$ poza pewnym zbiorem zwartym w M to mówimy, że f jest *gładką i o zwartym nośniku* w M .

(b) Rodzinę wszystkich funkcji gładkich określonych na rozmaitości różniczkowej M (gładkich i o zwartym nośniku) oznaczamy $C^\infty(M)$ ($C_0^\infty(M)$).

Uwaga 2.7 (a) Jak zauważyliśmy wcześniej, Uwaga 2.3 (d), otwarty, niepusty zbiór $U \subset M$ jest rozmaitością różniczkową tego samego wymiaru co M . Zatem definicja określa również funkcje gładkie $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ oraz funkcje gładkie i o zwartym nośniku zawartym w U . Rodzinę wszystkich funkcji gładkich w U (gładkich i o zwartym nośniku w U) oznaczamy $C^\infty(U)$ ($C_0^\infty(U)$).

(b) Przypuśćmy, że (Φ_1, U_1) i (Φ_2, U_2) są dwiema mapami, określonymi w otoczeniach U_1 i U_2 punktu $x \in M$ rozmaitości różniczkowej M . Niech $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Gładkość funkcji f można wówczas zdefiniować na dwa sposoby, wymagając spełnienia warunku

$$(W_1) \ f \circ (\Phi_1)_{-1} \in C^\infty(\Phi_1(U_1)) \quad \text{lub} \quad (W_2) \ f \circ (\Phi_2)_{-1} \in C^\infty(\Phi_2(U_2)).$$

Sprawdźmy, że warunki te są sobie równoważne na części wspólnej $U_1 \cap U_2$; wystarczy pokazać np., że (W_2) , czyli funkcja $f \circ (\Phi_2)_{-1} : (\Phi_2)(U_2) \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka. Mamy:

$$f \circ (\Phi_1)_{-1} = f \circ ((\Phi_2)_{-1} \circ \Phi_2) \circ (\Phi_1)_{-1} = [f \circ (\Phi_2)_{-1}] \circ [\Phi_2 \circ (\Phi_1)_{-1}].$$

Wiemy, że $\Phi_2 \circ (\Phi_1)_{-1} : \Phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \Phi_2(U_1 \cap U_2)$ jest dyfeomorfizmem w $\mathbb{R}^k$ (Uwaga 2.1(c)). Z założenia, funkcja $f \circ (\Phi_2)_{-1} : \Phi_2(U_2) \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka, więc tym bardziej $f \circ (\Phi_2)_{-1} : \Phi_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka. Stąd funkcja $f \circ (\Phi_1)_{-1}$, jako złożenie funkcji gładkiej z dyfeomorfizmem, jest też funkcją gładką na $\Phi_1(U_1 \cap U_2)$, zatem zachodzi warunek (W_1) , gdzie U_1 zastąpiono przez $U_1 \cap U_2$.

Niech M będzie rozmaitością różniczkową wymiaru k w $\mathbb{R}^m$ ($1 \leq k \leq m$) i niech Ω będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^m$ takim, że $M \subset \Omega$. Niech $f = F|_M : M \rightarrow \mathbb{R}$ będzie zawężeniem funkcji gładkiej $F \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ do zbioru M , tj. $f(x) = F(x)$ dla $x \in M$. W trakcie dalszych rozważań odpowiemy na następujące dwa pytania:

- (a) czy zawężenie $f = F|_M : M \rightarrow \mathbb{R}$ funkcji gładkiej w Ω jest gładkie w M (Lemat 2.1)?
- (b) Czy dla każdej funkcji $f \in C_o^\infty(M)$ istnieje funkcja $F \in C_o^\infty(\Omega)$ taka, że $F|_M = f$ (Lemat 2.3)?

Lemat 2.1 *Niech M będzie rozmaitością różniczkową wymiaru k w $\mathbb{R}^m$. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^m$ takim, że $M \subset \Omega$. Wówczas jeżeli $F \in C^\infty(\Omega)$ to $F|_M \in C^\infty(M)$.*

Dowód. Niech (Φ, U) będzie mapą różniczkową, a $\tilde{\Phi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ związanym z nią dyfeomorfizmem. Możemy założyć, że $\tilde{U} \subset \Omega$. Ponieważ $\tilde{\Phi}_{-1}$ i F są odwzorowaniami gładkimi, więc $F \circ \tilde{\Phi}_{-1} \in C^\infty(\tilde{V})$. Wówczas jednak $F \circ \Phi_{-1} = F \circ \tilde{\Phi}_{-1}|_{\mathbb{R}^k \cap \tilde{V}}$ jest też funkcją gładką. Stąd funkcja $F|_M$ jest gładka, bo $F|_M \circ \Phi_{-1} = F \circ \Phi_{-1}$. ■

Wykażemy obecnie następujący lemat:

Lemat 2.2 *Niech U będzie otwartym podzbiorem rozmaitości różniczkowej M , a U_o - zwartym podzbiorem zawartym w U . Wówczas istnieje funkcja $\varphi \in C^\infty(M)$ taka, że nośnik $\text{supp } \varphi \subset U$, $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ dla każdego $x \in M$ oraz $\varphi(x) = 1$ dla $x \in U_o$.*

Dowód. Istnieje zbiór $\tilde{U}$ otwarty w $\mathbb{R}^m$ taki, że $\tilde{U} \cap M = U$, a zbiór U_o jest zwartym podzbiorem zbioru U , więc tym bardziej zbioru $\tilde{U}$. Na podstawie Twierdzenia 1.1, istnieje funkcja $\tilde{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ taka, że $\text{supp } \tilde{\varphi} \subset \tilde{U}$ oraz $\tilde{\varphi}(x) = 1$ dla $x \in U_o$. Stosując Lemat 2.1 łatwo zauważyć, że funkcja $\varphi = \tilde{\varphi}|_M$ spełnia tezę Lematu 2.2. ■

Wykażemy obecnie łatwo twierdzenie o rozkładzie jedynki na rozmaitości różniczkowej (por. Twierdzenie 1.2 w przypadku, gdy $M = U$ jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^m$).

Twierdzenie 2.4 (o rozkładzie jedynki na rozmaitości) *Niech $\mathcal{P} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ będzie pokryciem rozmaitości różniczkowej M w $\mathbb{R}^m$. Wówczas istnieją*

- (a) *skończone lub przeliczalne, lokalnie skończone pokrycie $\mathcal{P}_1 = \{G_i\}_{i \in I}$ rozmaitości M takie, że każdy ze zbiorów $\overline{G_i}$ jest zwarty i zawarty w pewnym elemencie pokrycia $\mathcal{P}$,*
- (b) *skończona lub przeliczalna rodzina funkcji $\varphi_i \in C^\infty(M)$ taka, że $\text{supp } \varphi_i \subset G_i$ oraz $0 \leq \varphi_i(x) \leq 1$ i $\sum_i \varphi_i(x) = 1$ dla każdego $x \in M$.*

Dowód. (a) Zbiór U_α jest dla każdego $\alpha \in A$ otwartym podzbiorem rozmaitości M , więc istnieje zbiór $\tilde{U}_\alpha$ otwarty w $\mathbb{R}^m$ taki, że $\tilde{U}_\alpha \cap M = U_\alpha$. Niech $\Omega = \bigcup_{\alpha \in A} \tilde{U}_\alpha$, wtedy Ω jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^m$ i $M \subset \Omega$. Z Lematu 1.2 zastosowanego do przestrzeni metrycznej $\langle \Omega, \rho \rangle$ z metryką ρ indukowaną przez $\mathbb{R}^m$ wnosimy, że istnieje pokrycie $\mathcal{P}_0 = \{Z_i\}_i$ skończone lub przeliczalne, oraz lokalnie skończone zbioru Ω takie, że każdy ze zbiorów $\overline{Z_i}$ jest zwarty i zawarty w pewnym zbiorze $\tilde{U}_\alpha$. Wówczas $\mathcal{P}_1 = \{G_i\}_i$, gdzie $G_i = Z_i \cap M$ jest pokryciem skończonym lub przeliczalnym oraz lokalnie skończonym rozmaitości M oraz każdy ze zbiorów $\overline{G_i}$ jest zwarty i zawarty w pewnym zbiorze elemencie pokrycia $\mathcal{P}$. To kończy dowód warunku (a).

(b) Z Twierdzenia 1.2 wynika, że istnieją funkcje $\tilde{\varphi}_i \in C^\infty(\Omega)$ takie, że $\text{supp } \tilde{\varphi}_i \subset Z_i$ oraz $0 \leq \tilde{\varphi}_i(x) \leq 1$ i $\sum_i \tilde{\varphi}_i(x) = 1$ dla $x \in \Omega$. Oznaczmy $\varphi_i = \tilde{\varphi}_i|_M$, wówczas $\text{supp } \varphi_i \subset G_i$ oraz $0 \leq \varphi_i(x) \leq 1$ i $\sum_i \varphi_i(x) = 1$ dla $x \in M$. Na podstawie Lematów 2.1 i 2.2 mamy $\varphi_i \in C^\infty(M)$, co kończy dowód warunku (b). ■

Lemat 2.3 *Niech M będzie rozmaitością różniczkową wymiaru k w $\mathbb{R}^m$, $k \leq m$. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^m$ takim, że $M \subset \Omega$. Wówczas, jeżeli $f \in C_o^\infty(M)$, to istnieje funkcja $F \in C_o^\infty(\Omega)$ taka, że $F|_M = f$.*

Dowód. (a) Jeżeli $k = m$ to możemy przyjąć $F(x) = 0$ dla $x \in \Omega \setminus M$. Takie rozszerzenie daje nam funkcję gładką na Ω , gdyż $\text{supp } f$ jest zbiorem zwartym zawartym w zbiorze otwartym M . Poza tym $F|_M = f$, więc F spełnia tezę Lematu. Założymy zatem, że $k < m$.

Przypuścimy wpraw, że istnieje taka mapa różniczkowa (Φ, U) , że $f \in C_o^\infty(M)$ i $\text{supp } f \subset U$. Niech $(\tilde{\Phi}, \tilde{U})$ będzie parą, wyznaczającą zgodnie z Definicją 2.3 mapę (Φ, U) ; możemy przy tym założyć, że $\tilde{U} \subset \Omega$. Wtedy funkcja $g = f \circ \Phi_{-1}$ jest określona i gładka na zbiorze $V = \tilde{\Phi}(U) = \Phi(U)$. Odwzorowanie Φ jest homeomorfizmem i $\text{supp } g = \Phi(\text{supp } f)$, więc $\text{supp } g$ jest zbiorem zwartym zawartym w zbiorze otwartym $V \subset \tilde{V}$. Z Twierdzenia 1.1 wnioskujemy, że istnieje funkcja gładka ψ na $\tilde{V}$ równa 1 na $\text{supp } g$ i taka, że $\text{supp } \psi \subset \tilde{V}$. Oznaczmy

$$G(x, y) = \psi(x, y)(f \circ \Phi_{-1})(x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^k, y \in \mathbb{R}^{m-k}$$

Wówczas

$$G \in C_o^\infty(\tilde{\Phi}(\tilde{U})) \quad \text{oraz} \quad G(x, 0) = (f \circ \Phi_{-1})(x) \quad \text{dla } x \in V \quad (2.4)$$

Niech $F = G \circ \tilde{\Phi}$. Funkcję F , określoną w $\tilde{U}$ możemy rozszerzyć do Ω przyjmując $F(x) = 0$ dla $x \in \Omega \setminus \tilde{U}$. Takie rozszerzenie daje nam funkcję gładką na Ω , gdyż $\text{supp } F \subset \tilde{U}$. Poza tym $F|_M = f$, więc F spełnia tezę Lematu.

(b) Odrzucimy obecnie założenie, że dla pewnej mapy (Φ, U) zachodzi $\text{supp } f \subset U$. Niech $f \in C_o^\infty(M)$ będzie dowolna. Niech $\{U_i\}_i$ będzie pokryciem lokalnie skończonym rozmaitości M dziedzinami pewnych map, a $\{\varphi_i\}_i$ - związanym z nim rozkładem jedności. Zbiór $\text{supp } f$ jest zwarty, na podstawie założenia. Zatem jedynie skończenie wiele zbiorów U_i ma niepuasty przekrój z $\text{supp } f$. Stąd

$$f(x) = \sum_{j=1}^l f(x)\varphi_{i_j}(x) \quad \text{dla } x \in M.$$

Stosując część (a) dowodu do funkcji $f_j(x) = f(x)\varphi_{i_j}(x)$, które są funkcjami o zwartym nośniku zawartym w U_i wnioskujemy, że istnieją funkcje $F_i \in C_o^\infty(\Omega)$ takie, że $F_j|_M = f_j$. Niech $F = \sum_{j=1}^l F_j$. Wówczas $F \in C_o^\infty(M)$ oraz $F|_M = \sum_{j=1}^l F_j|_M = \sum_{j=1}^l f_j = f$. ■

2.4 Pole wektorowe i przestrzeń styczna

Raz jeszcze założymy, że M jest rozmaitością różniczkową bez brzegu. Jest widoczne, że $C^\infty(M)$ oraz $C_o^\infty(M)$ są algebrami przemiennymi ze względu na dodawanie i mnożenie funkcji. Zatem, zgodnie z Definicją 1.4 (a), mają sens różniczkowanie algebry $C^\infty(M)$. Każde takie różniczkowanie nazywamy *polem wektorowym* (Definicja 1.6) na rozmaitości różniczkowej M a rodzinę wszystkich pól wektorowych oznaczamy przez $\Gamma(M)$. Definiując działania na ich elementach X, Y wzorami (1.6), tj. jeżeli $X, Y \in \Gamma(M)$, to $(X+Y)(f) = X(f) + Y(f)$ i $(gX)(f) = gX(f)$ dla $f, g \in C^\infty(M)$ zauważamy, podobnie jak w przypadku pól wektorowych na zbiorze otwartym U w $\mathbb{R}^m$ (Twierdzenie 1.4), że $\Gamma(M)$ jest modulem nad pierścieniem z jednością $C^\infty(U)$; co więcej, jeżeli $f = \text{const} \in C^\infty(M)$ i $X \in \Gamma(M)$, to $X(f) = 0$. Wszystkie powyższe uwagi dotyczą również algebr $C^\infty(U)$, $C_o^\infty(U)$ oraz modułu $\Gamma(U)$, gdy U jest otwartym niepustym podzbiorem M , gdyż jak zauważyliśmy wcześniej taki zbiór U jest rozmaitością tego samego wymiaru co M .

Przeniesiemy z przypadku przestrzeni $\mathbb{R}^m$ na przypadek rozmaitości różniczkowej M Twierdzenie 1.5 o lokalizacji dla pola wektorowego:

Twierdzenie 2.5 (o lokalizacji pola wektorowego na rozmaitości)

Niech U będzie otwartym podzbiorem rozmaitości różniczkowej M , a V otwartym podzbiorem właściwym zbioru U . Wówczas

- (a) jeżeli $g \in C^\infty(U)$ i $g(x) = 0$ dla każdego $x \in V$, to dla każdego pola wektorowego $X \in \Gamma(U)$ i dla każdego $x \in V$ zachodzi równość $X(g)(x) = 0$
- (b) jeżeli $f(y) = g(y)$ dla każdego y należącego do pewnego otoczenia otwartego V punktu $x \in U$, to $(X(f))(x) = (X(g))(x)$.

Dowód tego twierdzenia jest analogiczny do dowodu Twierdzenia 1.5. Zachęcamy Czytelnika do przeprowadzenia odpowiedniego rozumowania.

Naszym najbliższym celem jest wykazanie, że lokalnie w pewnym otoczeniu każdego punktu, pola wektorowe na rozmaitości reprezentują się podobnie jak w przypadku pól określonych na podzbiorze otwartym w $\mathbb{R}^m$. Najpierw jednak wykażemy następujący lemat wiążący pola wektorowe określone na całej rozmaitości z polami wektorowymi określonymi na właściwym podzbiorze otwartym tej rozmaitości.

Lemat 2.4 Niech M będzie rozmaitością różniczkową i niech $U \subset M$ będzie niepustym zbiorem otwartym w M . Wówczas

- (a) dla każdego $X \in \Gamma(M)$ istnieje takie $Y \in \Gamma(U)$, że dla każdej funkcji $f \in C^\infty(M)$ i każdego $x \in U$ zachodzi równość $X(f)(x) = Y(f|_U)(x)$,

(b) dla każdego $X \in \Gamma(U)$ i każdego zbioru otwartego U_o takiego, że domknięcie $\overline{U_o}$ jest zwartym podzbiorem zawartym w U istnieje pole wektorowe $Y \in \Gamma(M)$ takie, że

$$Y(f)(y) = X(f|_{U_o})(y)$$

dla każdego $f \in C^\infty(M)$ i każdego $y \in U_o$.

Dowód. (a) Niech $x \in U$. Zbiór U jest otwarty, więc istnieje kula $K(x, \epsilon)$ o środku w punkcie x i o promieniu $\epsilon > 0$ w przestrzeni metrycznej $\langle M, \rho \rangle$, zawarta w U . Na podstawie Lematu 2.2 istnieje funkcja $\varphi \in C_o^\infty(U)$ taka, że $\text{supp } \varphi \subset K(x, \epsilon)$ oraz $\varphi(y) = 1$ dla $y \in \overline{K(x, \frac{1}{2}\epsilon)}$. Niech $f \in C^\infty(U)$. Wówczas $\varphi f \in C_o^\infty(M)$, możemy więc określić Y wzorem

$$Y(f)(x) = X(\varphi f)(x) \quad \text{dla } x \in U. \quad (2.5)$$

Z Twierdzenia 2.5 wnosimy, że definicja Y nie zależy od wyboru funkcji φ , równej 1 w pewnym otoczeniu punktu x . Równość (2.5) definiuje funkcję gładką na U , jeżeli $f \in C^\infty(U)$. Ponadto odwzorowanie $f \rightarrow Yf$ jest liniowe, co wynika natychmiast z liniowości X .

Pokażemy, że Y jest różniczkowaniem algebry $C^\infty(U)$. Niech bowiem $\psi \in C_o^\infty(M)$, przy czym $\text{supp } \psi \subset K(x, \frac{1}{2}\epsilon)$ i $\psi(y) = 1$ dla $y \in \overline{K(x, \frac{1}{4}\epsilon)}$. Niech $g \in C^\infty(U)$. Wówczas

$$\begin{aligned} Y(f \cdot g)(x) &= X(\psi f \cdot g)(x) = X(\psi f \cdot \varphi g)(x) = \\ &= \psi(x)f(x)X(\varphi g)(x) + \varphi(x)g(x)X(\psi \cdot f)(x) = \\ &= f(x)Y(g)(x) + g(x)X(g)(x). \end{aligned}$$

Zatem $Y \in \Gamma(U)$. Wprost z określenia mamy równość

$$Y(f|_U)(x) = X(f)(x) \quad \text{dla } x \in U$$

(b) Niech funkcja $\psi \in C_o^\infty(M)$ będzie taka, że $\text{supp } \psi \subset U$ i $\psi(y) = 1$ dla $y \in \overline{U_o}$. Niech $g \in C^\infty(M)$. Określamy Y równościami

$$Y(g)(y) = \begin{cases} \psi(y)X(g|_U)(y) & \text{gdy } y \in U \\ 0 & \text{gdy } y \notin U. \end{cases}$$

Ponieważ nośnik $\text{supp } \psi$ jest zbiorem zwartym zawartym w zbiorze otwartym U , więc $Y(g)$ jest funkcją gładką na M . Bezpośredni rachunek pokazuje, że $g \rightarrow Y(g)$ jest polem wektorowym na M . Ponadto, jeśli $y \in U_o$ to

$$Y(g)(y) = X(g|_U)(y), \quad \text{gdyż } \psi(y) = 1.$$



Przeniesiemy obecnie Twierdzenie 1.6 o reprezentacji pól wektorowych na przypadek rozmaiłości różniczkowej M wymiaru k , $1 \leq k \leq m$ w miejsce $\mathbb{R}^m$. Przypomnijmy, że jeżeli $f \in C^\infty(U)$, gdzie U jest zbiorem niepustym i otwartym w $\mathbb{R}^m$, to przez $\partial_i f(x)$ oznaczamy pochodną cząstkową $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, gdzie $i = 1, 2, \dots, m$ (por. Przykład 1.5(a)). Jest widoczne, jeżeli (Φ, U) jest mapą rozmaiłości różniczkowej, to odwzorowania

$$f \rightarrow \partial_i(f \circ \Phi_{-1})(\Phi(x)), \quad \text{gdzie } i = 1, 2, \dots, k \quad (2.6)$$

dla $f \in C^\infty(U)$ są polami wektorami na U . Takie pole wektorowe oznaczmy symbolem ∂_i^Φ .

Twierdzenie 2.6 (o lokalnej reprezentacji pól wektorowych) *Niech (Φ, U) będzie mapą różniczkową rozmaiłości różniczkowej M wymiaru k w $\mathbb{R}^m$ ($1 \leq k \leq m$). Wówczas pola wektorowe $\partial_i^\Phi \in \Gamma(U)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) stanowią bazę modułu $\Gamma(U)$*

Dowód. Niech $X \in \Gamma(U)$. Wówczas

$$C^\infty(\Phi(U)) \ni g \rightarrow X(g \circ \Phi)(\Phi_{-1}(\xi))$$

jest polem wektorowym na $\Phi(U) \subset \mathbb{R}^k$. Z Twierdzenia 1.6 wnosimy, że

$$X(g \circ \Phi)(\Phi_{-1}(\xi)) = \sum_{i=1}^k c_i(\xi) \partial_i g(\xi)$$

dla pewnych funkcji $c_i \in C^\infty(\Phi(U))$, $i = 1, 2, \dots, k$. Niech $f \in C^\infty(U)$ i niech $g = f \circ \Phi_{-1}$. Wówczas przy $\xi = \Phi(x)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} X(f)(x) &= X(g \circ \Phi)(\Phi_{-1}(\xi)) = \sum_{i=1}^k c_i(\xi) \partial_i g(\xi) \\ &= \sum_{i=1}^k (c_i \circ \Phi)(x) \partial_i (f \circ \Phi_{-1})(\Phi(x)) = \sum_{i=1}^k b_i(x) \partial_i^\Phi(f)(x), \end{aligned}$$

gdzie $b_i = c_i \circ \Phi$. Zatem każde pole wektorowe daje się przedstawić jako kombinacja liniowa pól ∂_i^Φ . Aby zakończyć dowód wystarczy pokazać, że pola te są $C^\infty(U)$ -liniowo niezależne. Niech $f_i(x) = (\Phi(x))_i$ dla $i = 1, 2, \dots, k$, gdzie $((\Phi(x))_i)$ oznacza i -tą współrzędną punktu $\Phi(x) \in \mathbb{R}^k$. Wówczas

$$\partial_j^\Phi(f_i)(x) = \partial_j(f_i \circ \Phi_{-1})(\Phi(x)) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i = j \\ 0 & \text{gdy } i \neq j. \end{cases}$$

To dowodzi liniowej niezależności pól wektorowych ∂_j^Φ , $j = 1, 2, \dots, k$. ■

Wniosek 2.1 *Niech M będzie rozmaitością różniczkową wymiaru k w $\mathbb{R}^m$. Dla każdego punktu $x \in M$ tej rozmaitości można znaleźć*

- (a) *otoczenie otwarte U_o punktu x w M ,*
 (b) *pola wektorowe $Y_1, \dots, Y_k \in \Gamma(M)$,*
o tej własności, że dla każdego pola wektorowego $X \in \Gamma(M)$ istnieją funkcje $b_1, \dots, b_k \in C^\infty(M)$ takie, że

$$X(f)(y) = \sum_{i=1}^k b_i(y) Y_i(f)(y),$$

dla dowolnej funkcji $f \in C^\infty(M)$ i dowolnego $y \in U_o$.

Dowód. Niech (Φ, U) będzie dowolną mapą taką, że $x \in U$. Istnieje wówczas zbiór otwarty U_o taki, że $x \in U_o$, $\overline{U_o} \subset U$ i $\overline{U_o}$ jest zbiorem zwartym. Z Lematu 2.4 (a) wnosimy, że dla każdego pola $X \in \Gamma(M)$ istnieje pole $Y \in \Gamma(U)$ takie, że

$$X(f)(y) = Y(f|_U)(y) \quad \text{dla każdego } y \in U \text{ i } f \in C^\infty(M). \quad (2.7)$$

Z Twierdzenia 2.6 wynika natomiast, że istnieją funkcje $c_1, \dots, c_k \in C^\infty(U)$ takie, że

$$Y = \sum_{i=1}^k c_i(x) \partial_i^\Phi, \quad (2.8)$$

Z punktu (b) Lematu 2.4 wnosimy skolei, że dla każdego $i = 1, \dots, k$ istnieje pole wektorowe $Y_i \in \Gamma(M)$ takie, że

$$Y_i(f)(y) = \partial_i^\Phi(f|_U)(y) \quad \text{dla każdego } y \in U_o \text{ i } f \in C^\infty(M), \quad (2.9)$$

Niech $\psi \in C_o^\infty(M)$ będzie funkcją gładką, przyjmującą wartość 1 na zbiorze U_o , o nośniku zawartym w zbiorze U i niech $b_i = \psi c_i$, $i = 1, \dots, k$. Wówczas z równań (2.7)-(2.9) otrzymujemy

$$Y(f)(y) = \sum_{i=1}^k b_i(y) Y_i(f)(y) \quad \text{dla każdego } y \in U_o \text{ i } f \in C^\infty(M). \quad \blacksquare$$

W następnym twierdzeniu zajmiemy się problemem rozszerzania (por. Lemat 2.3) w przypadku pól wektorowych.

Twierdzenie 2.7 (o rozszerzaniu pola wektorowego) *Niech M będzie k -wymiarową rozmaitością różniczkową, $0 < k < m$, oraz niech $X \in \Gamma(M)$ będzie polem wektorowym na M . Niech ponadto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ będzie zbiorem otwartym takim, że $M \subset \Omega$. Wówczas istnieje pole wektorowe $\tilde{X} \in \Gamma(\Omega)$ takie, że*

$$\tilde{X}(f)(x) = X(f|_M)(x)$$

dla każdej funkcji $f \in C^\infty(\Omega)$ i dla każdego $x \in M$.

Dowód. Niech $A = \{(\Phi_\alpha, U_\alpha)\}_\alpha$ będzie dowolnym atlasem rozmaitości M . Niech $\tilde{\Phi} : \tilde{U}_\alpha \rightarrow \tilde{V}_\alpha$ będzie dyfeomorfizmem związanym z mapą (Φ_α, U_α) . Możemy założyć, że $\tilde{U}_\alpha \subset \Omega$. Rodzina $B = A \cup \{\Omega \setminus \bigcup_\alpha \tilde{U}_\alpha\}$ jest pokryciem zbioru Ω zbiorami otwartymi. Z Twierdzenia 1.2 możemy zatem wnioskować, że istnieją:

- (a) lokalnie skończone, co najwyżej przeliczalne, pokrycie $\{\tilde{U}_i\}$ zbioru Ω takie, że $\tilde{U}_i \subset \tilde{U}_\alpha$, dla pewnego α ,
- (b) rozkład jedności $\tilde{\varphi}_i$ związany z pokryciem $\{\tilde{U}_i\}$.

Niech $U_i = \tilde{U}_i \cap M$ oraz $\Phi_i = \Phi_\alpha|_{U_i}$ jeśli $\tilde{U}_i \subset \tilde{U}_\alpha$. Rodzina $A_o = \{(\Phi_i, U_i)\}_i$ jest wówczas co najwyżej przeliczalnym atlasem rozmaitości M . Natomiast rodzina funkcji $\{\varphi_i = \tilde{\varphi}_i|_M\}_i$ jest rozkładem jedności na M związanym z lokalnie skończonym pokryciem $\{U_i\}_i$.

Przyjmijmy $X_i = \varphi_i X$, wtedy X_i jest polem wektorowym na M o tej własności, że gdy $x \notin \text{supp } \varphi_i$, to $X_i(f)(x) \equiv 0$ dla dowolnej funkcji $f \in C^\infty(M)$. Niech $\tilde{\Phi}_i : \tilde{U}_i \rightarrow \tilde{V}_i$ będzie dyfeomorfizmem związanym z mapą (Φ_i, U_i) . Odwzorowanie

$$C^\infty(V_i) \ni g \rightarrow X_i(g \circ \Phi_i)((\Phi_i)_{-1}(\xi))$$

jest polem wektorowym na $V_i = \tilde{\Phi}_i(U_i)$; oznaczmy je przez Y_i . Z określenia X_i otrzymujemy natychmiast, że $Y_i(g)(\xi) = 0$ jeśli ξ nie jest elementem zwartego zbioru $K_i = \Phi_i(\text{supp } \varphi_i)$. Zatem pole Y_i jest zerowe poza zbiorem zwartym K_i .

Określmy na $\tilde{V}_i = \tilde{\Phi}_i(\tilde{U}_i)$ nowe pole wektorowe, które będzie się pokrywało z polem Y_i na zbiorze V_i . Niech ψ_i będzie funkcją gładką na $\mathbb{R}^m$ taką, że $\text{supp } \psi_i \subset \tilde{V}_i$ oraz $\psi_i(x) = 1$ dla $x \in K_i$; takie funkcje istnieją na podstawie Twierdzenia 1.1. Niech

$$\tilde{Y}_i(g)(\xi, \eta) = \psi_i(\xi, \eta) Y_i(g|_{V_i})(\xi) \quad \text{dla} \quad \xi \in V_i \subset \mathbb{R}^k, \eta \in \mathbb{R}^{m-k},$$

gdzie $g \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Czytelnik sprawdzi łatwo, że $\tilde{Y}_i$ jest polem wektorowym na $\tilde{V}_i$, przyjmującym dla każdej funkcji g wartość 0 we wszystkich punktach

poza nośnikiem funkcji ψ_i . Z własności funkcji ψ_i wynika natychmiast, że

$$\tilde{Y}_i(g)(\xi, 0) = Y_i(g|_{V_i})(\xi).$$

Określmy dla $f \in C^\infty(\Omega)$

$$\tilde{X}_i(f)(x) = \begin{cases} \tilde{Y}_i(f \circ (\tilde{\Phi}_i)_{-1})(\tilde{\Phi}_i(x)) & \text{gdy } x \in \tilde{U}_i \\ 0 & \text{gdy } x \in \Omega \setminus \tilde{U}_i. \end{cases}$$

Czytelnik łatwo zauważy, że $\tilde{X}_i$ jest polem wektorowym na Ω i $\tilde{X}_i(f)(x) = X_i(f|_M)(x)$ dla $x \in U_i$. Oznaczmy

$$\tilde{X} = \sum_i \tilde{X}_i.$$

Pole wektorowe $\tilde{X}_i$ jest zerowe poza zbiorem $\tilde{U}_i$. Zbiory te tworzą pokrycie lokalnie skończone zbioru Ω . Zatem ta suma użyta w określeniu $\tilde{X}$ jest skończona w otoczeniu dowolnego punktu $x \in \Omega$. Wynika z tego, że $\tilde{X} \in \Gamma(\Omega)$. Ponadto dla $x \in M$ zachodzi

$$\begin{aligned} \tilde{X}(f)(x) &= \sum_i \tilde{X}_i(f)(x) = \sum_i X_i(f|_M)(x) = \\ &= \sum_i w_i(x) X(f|_M)(x) = X(f|_M)(x). \end{aligned}$$

To kończy dowód. ■

W §4.3 wprowadziliśmy pojęcie przestrzeni stycznej do zbioru niepustego i otwartego U w przestrzeni $\mathbb{R}^m$ w punkcie $p \in U$, a także pojęcie wektora stycznego oraz wiązki stycznej do U (Definicja 1.7). Pojęcia te rozszerzymy obecnie na przypadek rozmaitości różniczkowej w $\mathbb{R}^m$. Wpierw wprowadzimy pewne pojęcia, dotyczące przestrzeni liniowych nad ciałem $\mathbb{K}$ liczb rzeczywistych lub liczb zespolonych (I, Część 1, §5 oraz II, Część 2, Definicja 1.23).

Definicja 2.9 Niech X oraz Y będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\mathbb{K}$ i niech $T : X \rightarrow Y$. Mówimy, że T jest *operatorem liniowym* z X do Y , gdy

$$T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2) \quad \text{ i } \quad T(ax) = aT(x)$$

dla każdych $x_1, x_2, x \in X$ oraz $a \in \mathbb{K}$. Gdy $Y = \mathbb{K}$, to operator liniowy $T : X \rightarrow \mathbb{K}$ nazywamy *funkcjonałem liniowym* lub *formą liniową*.

Rodzina funkcji gładkich określonych na rozmaitości $C^\infty(M)$ jest algebrą na $\mathbb{R}$ a więc zarazem przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$. Możemy zatem mówić o formach liniowych określonych na $C^\infty(M)$. Jeżeli $p \in M$ jest dowolnym punktem rozmaitości M a $X \in \Gamma(M)$ dowolnym polem wektorowym to możemy określić formę liniową X_p na $C^\infty(M)$ wzorem

$$X_p(f) = X(f)(p) \quad \text{dla} \quad f \in C^\infty(M).$$

Następująca definicja uogólnia Definicję 1.7 na przypadek, gdy zbiór $U \subset \mathbb{R}^m$, niepusty i otwarty, zastąpić rozmaitością różniczkową $M \subset \mathbb{R}^m$:

Definicja 2.10 Niech M będzie rozmaitością różniczkową w $\mathbb{R}^m$ i niech $p \in M$. Rodzinę $T_p M$ wszystkich form liniowych $\{X_p : X \in \Gamma(M)\}$ nazywamy *przestrzenią styczną do rozmaitości M w punkcie p* . Elementy przestrzeni $T_p M$ nazywamy *wektorami stycznymi do M w punkcie p* , a sumę $TM = \bigcup_{p \in M} T_p(M)$ wszystkich przestrzeni stycznych $T_p(M)$ nazywamy *wiązką styczną do M* .

Wykażemy następujące twierdzenie, będące uogólnieniem Twierdzenia 1.7 o przestrzeni stycznej do zbioru otwartego $U \subset \mathbb{R}^m$:

Twierdzenie 2.8 (o przestrzeni stycznej do rozmaitości) *Niech M będzie k -wymiarową rozmaitością różniczkową w $\mathbb{R}^m$ ($1 \leq k \leq m$). Wówczas*
(a) przestrzeń styczna $T_p M$ jest dla każdego $p \in M$ przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$ wymiaru k ,
(b) forma liniowa $L : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ jest wektorem stycznym w punkcie $p \in M$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$L(fg) = f(p)L(g) + g(p)L(f)$$

dla dowolnych $f, g \in C^\infty(M)$.

Dowód. (a) uzyskuje się tak jak w Twierdzeniu 2.6, uwzględniając Uwagę 2.7, natomiast (b) uzyskujemy jak w Twierdzeniu 1.7. ■

Uwaga 2.8 Niech $p \in M$ będzie dowolnym punktem rozmaitości k -wymiarowej M . Jeżeli (Φ, U) jest mapą tej rozmaitości taką, że $p \in U$ to z Twierdzenia 2.6 wynika natychmiast, że wektory styczne $\partial_{i,p}^\Phi$, $i = 1, \dots, k$ określone wzorem

$$\partial_{i,p}^\Phi(f) = \partial_i^\Phi(f)(p), \quad f \in C^\infty(U)$$

stanowią bazę przestrzeni stycznej $T_p M$.

Przykład 2.6 Niech M będzie rozmaiłością różniczkową w $\mathbb{R}^m$ i niech punkt $p \in M$ będzie ustalony. Niech $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie $\epsilon > 0$, będzie krzywą gładką w $\mathbb{R}^m$, leżącą na M (tj. $\gamma(-\epsilon, \epsilon) \subset M$) i taką, że $\gamma(0) = p$. Zdefiniujemy $\dot{\gamma}(0) : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$\dot{\gamma}(0)(f) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(p)}{t} = (f \circ \gamma)'(0).$$

Z własności pochodnej i Twierdzenia 2.8 (b) wynika natychmiast, że $\gamma(0)$ jest wektorem stycznym do M w punkcie p . Wektor $\dot{\gamma}(0)$ nazywamy *wektorem stycznym do krzywej γ w punkcie p* . Pokażemy, że każdy wektor styczny do M w punkcie p jest wektorem stycznym do pewnej krzywej gładkiej γ leżącej w M i przechodzącej przez p :

Lemat 2.5 Niech M będzie rozmaiłością różniczkową wymiaru k w $\mathbb{R}^m$, $k \leq m$ i niech $p \in M$. Jeżeli $v \in T_p M$ ($v \neq 0$), to istnieje krzywa gładka $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($\epsilon > 0$) taka, że $\gamma(-\epsilon, \epsilon) \subset M$, $\gamma(0) = p$ i $v = \dot{\gamma}(0)$.

Dowód. Niech (Φ, U) będzie mapą taką, że $p \in U$. Niech $v \in T_p M$, $v \neq 0$. Wówczas istnieje pole wektorowe $X \in \Gamma(M)$ takie, że $v = X_p$. Z Twierdzenia 2.6 i Lematu 2.4 (a) wynika, że

$$X(f)(x) = \sum_{i=1}^k a_i(x) \partial_i^\Phi(f|_U)(x) \quad \text{dla } x \in U, f \in C^\infty(M)$$

przy pewnych $a_i \in C^\infty(U)$. Niech $\tilde{\gamma} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \Phi(U)$ będzie krzywą postaci

$$\tilde{\gamma}(t) = (a_1(p)t + (\Phi(p))_1, \dots, a_k(p)t + (\Phi(p))_k)$$

oraz niech

$$\gamma = \Phi_{-1} \circ \tilde{\gamma} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Wówczas γ jest krzywą gładką w $M \subset \mathbb{R}^m$, przy czym

$$\gamma(0) = \Phi_{-1}(\tilde{\gamma}(0)) = \Phi_{-1}(\Phi(p)) = p$$

i

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(0)f &= (f \circ \gamma)'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\Phi_{-1}(\tilde{\gamma}(t))) - f(\Phi_{-1}(\tilde{\gamma}(0)))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\gamma}'(0)(f \circ \Phi_{-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^K a_i(p) \partial_i(f \circ \Phi_{-1})(\Phi(p)) = \sum_{i=1}^K a_i(p) \partial_i^\Phi(f)(p) = v(f)(p) \end{aligned}$$

dla $f \in C^\infty(U)$. ■

Uwaga 2.9 Rozmaitość różniczkowa M jest podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^m$, dlatego w każdym punkcie $p \in M$ mamy określone dwie przestrzenie styczne $T_p M$ i $T_p \mathbb{R}^m$. Wykażemy, że przestrzeń styczną $T_p M$ można utożsamić z pewną k -wymiarową podprzestrzenią przestrzeni $T_p \mathbb{R}^m$. Niech bowiem $p \in M$ i $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ będzie krzywą gładką taką, że $\gamma(-\epsilon, \epsilon) \subset M$, $\gamma(0) = p$. Wówczas wektor styczny $\dot{\gamma}(0)$ określa nam formę liniową zarówno na $C^\infty(M)$ jak i na $C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Obydwie te formy liniowe spełniają warunek (b) z Twierdzenia 2.8, więc są wektorami stycznymi odpowiednio do M i $\mathbb{R}^m$. Niech $v \in T_p M$. Zgodnie z Lematem 2.5 istnieje wówczas krzywa gładka γ taka, że $v(f) = (f \circ \gamma)'(0)$ dla każdego $f \in C^\infty(M)$. Niech T będzie odwzorowaniem przyporządkowującym wektorowi v formę liniową

$$\tilde{v} : g \rightarrow (g \circ \gamma)'(0) \quad \text{dla } g \in C^\infty(\mathbb{R}^m).$$

Ta forma liniowa jest wektorem stycznym do $\mathbb{R}^m$ w punkcie p . Zauważmy, że przyporządkowanie wektorowi v wektora $\tilde{v}$ nie zależy od wyboru krzywej γ . Niech bowiem $\gamma_1 : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie $\delta > 0$, będzie drugą krzywą gładką taką, że $\gamma_1(-\delta, \delta) \subset M$, $\gamma_1(0) = p$ i $v(f) = (f \circ \gamma_1)'(0)$. Wówczas dla każdej funkcji $g \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ mamy

$$(g \circ \gamma_1)'(0) = (g|_M \circ \gamma_1)'(0) = v(g|_M) = (g_M \circ \gamma)'(0) = (g \circ \gamma)'(0).$$

Twierdzenie 2.9 (o monomorfizmie T) Niech M będzie rozmaitością różniczkową w $\mathbb{R}^m$ i niech $p \in M$. Wówczas odwzorowanie

$$T : T_p M \ni v \rightarrow \tilde{v} \in T_p \mathbb{R}^m$$

jest monomorfizmem liniowym.

Dowód. Wykażemy wpierw liniowość T . Z określenia T wynika, że $(Tv)(f) = v(f|_M)$ dla każdych $v \in T_p M$ i $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Zatem dla każdych $v, w \in T_p M$, $\lambda \in \mathbb{R}$ oraz $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ mamy

$$\begin{aligned} [T(v+w)](f) &= (v+w)(f|_M) = v(f|_M) + w(f|_M) = \\ &= (Tv)(f) + (Tw)(f), \\ T(\lambda v)(f) &= (\lambda v)(f|_M) = \lambda[v(f|_M)] = \lambda(Tv)(f), \end{aligned}$$

skąd wynika liniowość T . Aby dowieść, że T jest monomorfizmem należy wykazać, że jeżeli $T(v) = 0$, to $v = 0$. Przypuśćmy, że $v \in T_p M$ jest takim

$$(Tv)(G) = v(G|_M) = v(g).$$

Zajmiemy się najpierw zagadnieniem orientacji przestrzeni $\mathbb{R}^m$. Niech skończone ciągi wektorów $(v_1, v_2, \dots, v_m)$ i $(w_1, w_2, \dots, w_m)$ będą dwiema uporządkowanymi bazami w przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^m$. Wektory $w_1, w_2, \dots, w_m$ można więc jednoznacznie wyrazić przy pomocy wektorów $v_1, v_2, \dots, v_m$ układem równań

$$\begin{array}{rcl} w_1 & = & a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1m}v_m \\ w_2 & = & a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{2m}v_m \\ \dots & \dots & \dots \\ w_m & = & a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \dots + a_{mm}v_m, \end{array}$$

przy czym macierz współczynników tego układu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1m} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots, & a_{mm} \end{pmatrix}$$

jest nieosobliwa, tj. jej wyznacznik $\det A \neq 0$. Co więcej, wektory $v_1, v_2, \dots, v_m$ wyrażają się przy pomocy wektorów $w_1, w_2, \dots, w_m$ przy pomocy macierzy A^{-1} , odwrotnej do macierzy A , o wyznaczniku $\det A^{-1} = (\det A)^{-1} \neq 0$. Stąd wyznaczniki $\det A$ i $\det A^{-1}$ są albo obydwa dodatnie, albo obydwa ujemne.

Definicja 2.11 Mówimy, że bazy $(v_1, v_2, \dots, v_m)$ i $(w_1, w_2, \dots, w_m)$ są *zgodnie zorientowane*, gdy $\det A > 0$, oraz że są *przeciwnie zorientowane*, gdy $\det A < 0$.

Czytelnik zechce łatwo pokazać, że relacja zgodnego zorientowania baz w $\mathbb{R}^m$ jest relacją równoważności w zbiorze wszystkich baz w $\mathbb{R}^m$, tj. jest zwrotna, symetryczna i przechodnia (por. I, Część 1, Definicja 2.10). Relacja ta wyznacza dwie klasy równoważności w zależności od tego, czy bazy w danej klasie są zgodnie zorientowane czy też przeciwnie zorientowane. Te klasy równoważności nazywamy *orientacjami przestrzeni $\mathbb{R}^m$* . W szczególności orientację $\mathbb{R}^m$, do której należy baza $(e_1, e_2, \dots, e_m)$, gdzie e_i jest wektorem o współrzędnej 1 na i -tym miejscu oraz o współrzędnych 0 na pozostałych miejscach, nazywamy *orientacją kanoniczną przestrzeni $\mathbb{R}^m$* .

Niech $(v_1, v_2, \dots, v_m)$ będzie bazą przestrzeni $\mathbb{R}^m$ i niech σ będzie permutacją zbioru $\{1, 2, \dots, m\}$, tj. bijekcją tego zbioru. Przypomnijmy z kombinatoryki, że para (i, j) , gdzie $i \neq j$, tworzy *transpozycję*, gdy $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ oraz $\sigma(k) = k$ dla każdego k różnego od i oraz j . Dowodzi się, że każda permutacja jest złożeniem pewnej skończonej liczby transpozycji przy czym we wszystkich przedstawieniach danej permutacji liczba transpozycji jest bądź parzysta, bądź nieparzysta. Gdy permutacja σ jest złożeniem parzystej liczby transpozycji, to nazywamy ją *permutacją parzystą*, a gdy jest złożeniem nieparzystej liczby transpozycji, nazywamy ją *permutacją nieparzystą*. Liczbę ϵ_σ równą $+1$, gdy permutacja jest parzysta i równą -1 gdy permutacja σ jest nieparzysta nazywamy *sygnaturą* permutacji σ . Liczby permutacji parzystych i nieparzystych zbioru $\{1, 2, \dots, m\}$ przy $m \geq 2$ są sobie równe i są równe $\frac{1}{2}m!$. Czytelnik zechce przeprowadzić dowód następującego lematu.

Lemat 2.6 *Niech σ będzie permutacją zbioru $\{1, 2, \dots, m\}$ a U . Bazy*

$$(v_1, v_2, \dots, v_m) \quad \text{ i } \quad (v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(m)})$$

przestrzeni $\mathbb{R}^m$ są zgodnie zorientowane wtedy i tylko wtedy, gdy σ jest permutacją parzystą.

Definicja 2.12 Niech $\hat{\tau}$ będzie wybraną orientacją przestrzeni $\mathbb{R}^m$. Wówczas parę $(\mathbb{R}^m, \hat{\tau})$ nazywamy *zorientowaną przestrzenią $\mathbb{R}^m$* . Jeżeli U jest zbiorem spójnym otwartym w $\mathbb{R}^m$ (w $\mathbb{R}^m_-$) to parę $(U, \hat{\tau})$ nazywamy *zorientowanym zbiorem otwartym U w $\mathbb{R}^m$ (w $\mathbb{R}^m_-$)*.

Z Lematu 2.6 wynika, że dla każdej orientacji $\hat{\tau}$ istnieje taka permutacja σ zbioru $\{1, 2, \dots, m\}$, że $(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(m)}) \in \hat{\tau}$. Niech $p \in U$ i niech $T_p U$ będzie przestrzenią styczną do U w punkcie p (Definicja 1.7 i Twierdzenie 1.7). Wektory styczne $(\partial_{\sigma(1),p}, \partial_{\sigma(2),p}, \dots, \partial_{\sigma(m),p})$ stanowią bazę

Przykład 2.7 Niech $\hat{\tau}$ będzie zadana orientacją w $\mathbb{R}^m$, a $(U_1, \hat{\tau})$ i $(U_2, \hat{\tau})$ dwoma zorientowanymi zbiorami otwartymi i spójnymi w $\mathbb{R}^m$. Niech $\Phi : U_1 \rightarrow U_2$ będzie dyfeomorfizmem U_1 na U_2 . Jeżeli $v \in T_p U_1$, to v jest kombinacją liniową wektorów stycznych $\partial_{i,p}$, określonych równościami $\partial_{i,p} f = \partial_i f(p)$. Zatem istnieją $v^{(i)} \in \mathbb{R}$ takie, że

Określmy

Wówczas $w(\Phi(p)) \in T_{\Phi(p)}U_2$ oraz

gdzie

W równościach tych $w^{(j)}$ są współczynnikami wektora $w(\Phi(p))$ w bazie $\partial_{1,\Phi(p)}, \dots, \partial_{m,\Phi(p)}$, a v_j są współczynnikami wektora $v(p)$ w bazie $\partial_{1,p}, \dots, \partial_{m,p}$. Rozpisując powyższe sumy, otrzymujemy układ równań

którego macierzą jest macierz jacobianowa $D\Phi(p)$ odwzorowania Φ (por. II, Część 1, Definicja 1.1 oraz wzór (1.6)). Zatem

$$(w^{(1)}(\Phi(p)), \dots, w^{(m)}(\Phi(p))) = (v^{(1)}(p), \dots, v^{(m)}(p))(D\Phi(p))^T,$$

gdzie A^T oznacza macierz transponowaną do macierzy A . Przy ustalonym $p \in U_1$, $(v_1, \dots, v_m)$ jest bazą zorientowaną w $T_p U_1$. Układ $(w^{(1)}, \dots, w^{(m)})$ jest bazą zorientowaną w $T_{\Phi(p)} U_2$, bo wyznacznik macierzy $D\Phi(p)$ jest jacobianem $\mathbf{J}\Phi(p)$ odwzorowania Φ w punkcie p (II, Część 1, Definicja 1.11(a)) i jest różny od 0.

Założmy, że dla każdego $p \in U_1$ baza zorientowana $(v_1(p), \dots, v_m(p))$ przestrzeni $T_p U_1$ jest zgodna z orientacją $\hat{\tau}$. Mówimy, że *dyfeomorfizm Φ zachowuje orientację*, jeżeli dla każdego $p \in U_1$ baza $(w_1(\Phi(p)), \dots, w_m(\Phi(p)))$ określona wzorem (2.10) jest również zgodna z orientacją $\hat{\tau}$.

Z powyższych rozważań wynika natychmiast następujący Lemat ,

Lemat 2.7 *Dyfeomorfizm $\Phi : U_1 \rightarrow U_2$, gdzie $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^m$ są zbiorami otwartymi i spójnymi, zachowuje orientację wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $p \in U_1$ zachodzi $\mathbf{J}(\Phi(p)) = \det D\Phi(p) > 0$.*

Rozszerzymy jeszcze tę terminologię na zbiory otwarte w $\mathbb{R}^m$ (§5.2, Definicja 2.5).

Definicja 2.13 Niech zbiory U_1 i U_2 będą niepuste, spójne i otwarte w $\mathbb{R}^m$ i niech $\Phi : U_1 \rightarrow U_2$ będzie bijekcją powstałą przez zawężenie do zbioru U_1 pewnego dyfeomorfizmu $\Psi : W_1 \rightarrow W_2$, gdzie W_1, W_2 są otwarte w $\mathbb{R}^m$, tj. $\Phi = \Psi|_{U_1}$. Mówimy, że *odwzorowanie Φ zachowuje orientację*, gdy $\det D\Psi(p) > 0$ dla każdego $p \in U_1$.

Wykorzystując to ostatnie wprowadzimy pojęcie orientacji na rozmaitościach różniczkowych oraz na rozmaitościach różniczkowych z brzegiem.

Definicja 2.14 Niech M będzie rozmaitością różniczkową wymiaru k w $\mathbb{R}^m$ z brzegiem. Atlas $A = \{(\Phi_t, U_t)\}_{t \in T}$ tej rozmaitości nazywamy *atlasem zorientowanym*, jeśli dla każdych dwóch map (Φ_1, U_1) i (Φ_2, U_2) z tego atlasu takich, że $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, odwzorowanie

$$\Phi_2 \circ (\Phi_1)^{-1} : \Phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \Phi_2(U_1 \cap U_2)$$

zachowuje orientację. Mówimy, że M jest *rozmaitością orientowalną*, jeżeli istnieje na niej atlas zorientowany. Dwa atlasy A_1 i A_2 nazywamy *zgodnie zorientowanymi*, jeśli ich suma $A_1 \cup A_2$ jest atlasem zorientowanym.

Uwaga 2.10 (a) W paragrafie 2.2 Części 1 użyliśmy pola wektorów normalnych dla określenia orientowalności powierzchni wymiaru 2 zanurzonej

w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Takie podejście jest możliwe również dla rozmaitości wymiaru $m - 1$ zawartych w $\mathbb{R}^m$. Do związku orientowalności z polem normalnym powrócimy jeszcze w paragrafie 7.5, tutaj jednak preferujemy opis orientowalności poprzez atlasy zorientowane, gdyż pozwala on na jednolite podejście niezależne od wymiaru rozmaitości.

(b) Czytelnik zechce sprawdzić, że zgodność zorientowania jest relacją równoważności w rodzinie wszystkich atlasów zorientowanych rozmaitości M . To umożliwia sformułowanie następującej definicji:

Definicja 2.15 Każdą z klas równoważności relacji zgodnego zorientowania rozmaitości z brzegiem M nazywamy *orientacją rozmaitości M* . Parę $(M, \hat{\tau})$, gdzie M jest rozmaitością orientowalną a $\hat{\tau}$ jej orientacją nazywamy *rozmaitością zorientowaną*.

Uwaga 2.11 (a) Niech U będzie zbiorem otwartym i spójnym w $\mathbb{R}^m$ (w $\mathbb{R}^m_-$). Zbiór U jest rozmaitością różniczkową z brzegiem. Na zbiorze U możemy określić dwa jedoelementowe atlasy $A = \{(\text{id}, U)\}$ i $\hat{A} = \{(\hat{\text{id}}, U)\}$, gdzie $\text{id}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m)$ i $\hat{\text{id}}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_{m-1}, -x_m)$. Czytelnik łatwo sprawdzi, że atlasy te nie są zgodnie zorientowane. Udowodnimy poniżej (Twierdzenia 2.10), że na U istnieją dokładnie dwie orientacje.

W Definicji 2.12 podaliśmy inne określenie orientacji podzbiorów otwartych spójnych w $\mathbb{R}^m$ (w $\mathbb{R}^m_-$). I w tym przypadku zbiór U możemy zorientować w dwojaki sposób. Obydwa podejścia prowadzą zatem do tych samych rezultatów. Dla uzgodnienia tych dwóch określeń naturalną rzeczą jest przyjąć, że orientacja zadana przez atlas A pokrywa się z orientacją wyznaczoną przez bazę $(e_1, \dots, e_m)$, a orientacja zadana przez atlas $\hat{A}$ pokrywa się z orientacją wyznaczoną przez bazę $(e_1, \dots, -e_m)$.

(b) W dalszym ciągu użyteczna będzie operacja zmiany orientacji mapy. Niech (Φ, U) będzie mapą rozmaitości różniczkowej z brzegiem M , a $\tilde{\Phi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ związanym z nią dyfeomorfizmem. Niech odwzorowanie Φ będzie postaci $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_k)$, gdzie $\Phi_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, k$. Wówczas odwzorowanie $\hat{\Phi}$ określone równością

$$\hat{\Phi}(x) = (\Phi_1(x), \dots, \Phi_{k-1}(x), -\Phi_k(x)), \quad x \in U,$$

generuje również mapę różniczkową $(\hat{\Phi}, U)$. Związany z nią dyfeomorfizm $\tilde{\tilde{\Phi}}$ ma postać

$$\tilde{\tilde{\Phi}}(y) = (\tilde{\Phi}_1(y), \dots, \tilde{\Phi}_{k-1}(y), -\tilde{\Phi}_k(y), \tilde{\Phi}_{k+1}(y), \dots, \tilde{\Phi}_m(y)), \quad y \in \tilde{U},$$

przy czym $\widehat{\Phi}_j = \widetilde{\Phi}_j|_M$ dla $j = 1, 2, \dots, k$. Niech (Ψ, U_1) będzie mapą na M taką, że $U_1 \cap U \neq \emptyset$. Wówczas dla każdego $x \in U_1 \cap U$ mamy

$$\det D(\Phi \circ \Psi_{-1})(\Psi(x)) = -\det D(\widehat{\Phi} \circ \Psi_{-1})(\Psi(x)) \quad (2.11)$$

oraz

$$\det D(\Phi \circ \Psi_{-1})(\Psi(x)) = \det D(\widehat{\Phi} \circ (\widehat{\Psi}_{-1}))(\Psi(x)). \quad (2.12)$$

Niech A będzie atlasem zorientowanym, a $\widehat{A} = \{(\widehat{\Phi}, U) : (\Phi, U) \in A\}$. Z równości (2.11) i (2.12) wynika, że $\widehat{A}$ jest atlasem zorientowanym oraz, że atlasy A i $\widehat{A}$ nie są zgodnie zorientowane. Zatem każdą rozmaitość orientowalną można zorientować przynajmniej dwójako. Pokażemy, że jeżeli rozmaitość M jest spójna i orientowalna, to ma dokładnie dwie orientacje.

Twierdzenie 2.10 (o orientacjach rozmaitości spójnej) *Jeżeli M jest rozmaitością z brzegiem, spójną i orientowalną, to istnieją dokładnie dwa sposoby zorientowania tej rozmaitości.*

Dowód. Niech A będzie atlasem zorientowanym dla M . Wówczas A oraz zdefiniowany wyżej w Uwadze 2.11 atlas $\widehat{A}$ określają dwa sposoby zorientowania rozmaitości M . Wykażemy, że trzeci sposób orientowania M nie istnieje. Niech B będzie dowolnym atlasem zorientowanym. Niech U będzie zbiorem tych $x \in M$, dla których istnieją mapy $(\Phi, U_1) \in A$ i $(\Psi, U_2) \in B$ takie, że $x \in U_1 \cap U_2$ i $\det D(\Phi \circ \Psi_{-1})(\Psi(x)) > 0$. Załóżmy, że $U \neq \emptyset$. Z określenia wynika, że U jest otwartym podzbiorem rozmaitości M , bo $\det D(\Phi \circ \Psi_{-1})$ jako funkcja ciągła musi zachowywać znak w pewnym otoczeniu punktu $\Psi(x)$. Jeśli $U \neq \overline{U}$, to istnieje punkt x_o w M , należący do domknięcia $\overline{U}$ zbioru U w M i nie należący do U . Istnieją wówczas mapy $(\Phi_3, U_3) \in A$ i $(\Psi_4, U_4) \in B$ takie, że $x_o \in U_3 \cap U_4$. Ale $x_o \notin U$, więc

$$\det D(\Phi_3 \circ (\Psi_4)_{-1})(\Psi_4(x_o)) < 0. \quad (2.13)$$

Przekrój $U \cap U_3 \cap U_4$ jest niepusty, bo $x_o \in \overline{U}$. Niech $x \in U \cap U_3 \cap U_4$. Wówczas istnieją mapy $(\Phi_5, U_5) \in A$ i $(\Psi_6, U_6) \in B$ takie, że

$$\det D(\Phi_5 \circ (\Psi_6)_{-1})(\Psi_6(x)) > 0.$$

Mamy

$$\begin{aligned} \det D(\Phi_3 \circ (\Psi_4)_{-1}) &= \det D(\Phi_3 \circ (\Phi_5)_{-1}) \cdot \det D(\Phi_5 \circ (\Psi_6)_{-1}) \\ &\quad \cdot \det D(\Psi_6 \circ (\Psi_4)_{-1}). \end{aligned}$$

Wszystkie wyznaczniki po prawej stronie tej równości są dodatnie, więc wyznacznik po jej lewej stronie jest też dodatni. Otrzymaliśmy sprzeczność z nierównością (2.13). Zatem nie może być $U \neq \bar{U}$, więc musi być $U = \bar{U}$.

Zatem zbiór U jest jednocześnie niepustym, otwartym i domkniętym podzbiorem zbioru M . Wobec spójności M , mamy $U = M$. Korzystając z określenia atlasu zorientowanego, możemy wykazać argumentując podobnie jak wyżej, że jeżeli $x \in U$, to $\det D(\Phi \circ \Psi_{-1})(\Psi(x)) > 0$ dla dowolnych $(\Phi, U_1) \in A$ i $(\Psi, U_2) \in B$ takich, że $x \in U_1 \cap U_2$. Zatem atlasy są zgodne gdy $U \neq \emptyset$.

W przeciwnym przypadku, gdy $U = \emptyset$, niepusty musi być zbiór tych $x \in M$, dla których istnieją mapy $(\Phi, U_1) \in \hat{A}$ i $(\Psi, U_2) \in B$ takie, że $x \in U_1 \cap U_2$ i $\det D(\Phi \circ \Psi_{-1})(\Psi(x)) > 0$.

Podobne do poprzedniego rozumowanie prowadzi do wniosku, że atlas B jest zgodny z $\hat{A}$. ■

Lemat 2.8 *Niech M będzie rozmaitością orientowalną z brzegiem, a A jej atlasem złożonym z map, których dziedziny są zbiorami spójnymi. Wtedy atlas A można przekształcić w atlas zorientowany przy pomocy odpowiednich zmian orientacji mapy.*

Dowód. Niech B będzie zorientowanym atlasem rozmaitości M , a (Ψ, U) - mapą atlasu A . Zbiór U z jednoelementowym atlasem $\{(\Psi, U)\}$ można traktować jako spójną zorientowaną rozmaitość różniczkową. Zawężenia atlasu B do U poprzez zawężenie dziedziny każdej mapy tego atlasu również definiuje atlas zorientowany na U . Na mocy Twierdzenia 2.10, atlas ten jest zorientowany zgodnie albo przeciwnie do wspomnianego atlasu jednoelementowego. Jeżeli jest zorientowany zgodnie, to pozostawiamy mapę (Ψ, U) niezmienną, a jeżeli przeciwnie, to zastępujemy ją mapą $(\hat{\Psi}, U)$ (por. Uwaga 2.11). Postępujemy tak z każdą mapą atlasu A . Powstanie nowy atlas, którego mapy są zgodne z mapami atlasu B , więc muszą być zgodne między sobą. ■

Przykład 2.8 (a) Każda rozmaitość, która posiada atlas złożony z jednej mapy jest orientowalna. Każdy płat powierzchniowy jest zatem rozmaitością orientowalną.

(b) Okrąg $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ jest rozmaitością orientowalną. Aby to wykazać

wykorzystamy atlas skonstruowany w Przykładzie 2.3(c). Niech

$$\begin{aligned}\Phi_1 : U_1 \ni (x_1 = \cos \varphi, x_2 = \sin \varphi) &\rightarrow \varphi \in (0, \pi), \\ \Phi_2 : U_2 \ni (x_1 = \cos \varphi, x_2 = \sin \varphi) &\rightarrow \varphi \in (\pi, 2\pi), \\ \Phi_3 : U_3 \ni (x_1 = \cos \varphi, x_2 = \sin \varphi) &\rightarrow \varphi \in \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right), \\ \Phi_4 : U_4 \ni (x_1 = \cos \varphi, x_2 = \sin \varphi) &\rightarrow \varphi \in \left(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right).\end{aligned}$$

Wówczas $\Phi_3 \circ (\Phi_2)_{-1}(\varphi) = \Phi_4 \circ (\Phi_2)_{-1}(\varphi) = \Phi_4 \circ (\Phi_1)_{-1}(\varphi) = \varphi$ i $\Phi_3 \circ (\Phi_1)_{-1}(\varphi) = \varphi + 2\pi$. Pochodne tych odwzorowań przejścia są funkcjami stałymi równymi 1, więc atlas ten jest zorientowany.

Można pokazać, że również sfery wyżej wymiarowe są rozmaitościami orientowanymi.

(c) W Części 1, Przykład 2.5 (b), zdefiniowaliśmy *wstęgę Möbiusa* z brzegiem. Obecnie zajmiemy się nią jako rozmaitością bez brzegu, określając ją następująco:

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v), (u, v) \in \Omega\},$$

gdzie

$$\begin{aligned}\varphi(u, v) &= (2 - v \sin \frac{1}{2}u) \sin u, \\ \psi(u, v) &= (2 - v \sin \frac{1}{2}u) \cos u, \\ \chi(u, v) &= v \cos \frac{1}{2}u,\end{aligned}$$

oraz $\Omega = \{(u, v) : 0 \leq u < 2\pi, -1 < v < 1\}$. Niech A będzie atlasem złożonym z dwóch map (Φ_1, U_1) i (Φ_2, U_2) , przy czym

$$\begin{aligned}U_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < u < 2\pi, -1 < v < 1\}, \\ U_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq u < \pi \text{ lub } \pi < u < 2\pi, -1 < v < 1\}\end{aligned}$$

oraz $(\Phi_1)_{-1} : U_1 \rightarrow M$ i $(\Phi_2)_{-1} : U_2 \rightarrow M$ są określone wzorami

$$\begin{aligned}(\Phi_1)_{-1}(u, v) &= \left((2 - v \sin \frac{1}{2}u) \sin u, (2 - v \sin \frac{1}{2}u) \cos u, v \cos \frac{1}{2}u \right), \\ (\Phi_2)_{-1}(\bar{u}, \bar{v}) &= \left(\left(2 - \bar{v} \sin \left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\bar{u} \right) \right) \sin(\pi + \bar{u}), \right. \\ &\quad \left. \left(2 - \bar{v} \sin \left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\bar{u} \right) \right) \cos(\pi + \bar{u}), \bar{v} \cos \left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\bar{u} \right) \right).\end{aligned}$$

Mamy

$$\begin{aligned}\Phi_1(U_1 \cap U_2) &= [(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)] \times (-1, 1), \\ \Phi_2(U_1 \cap U_2) &= [(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)] \times (-1, 1).\end{aligned}$$

Biorąc $(\bar{u}, \bar{v}) = \Phi_2 \circ (\Phi_1)_{-1}(u, v)$, gdzie $(u, v) \in (\pi, 2\pi) \times (-1, 1)$, otrzymujemy równania

$$\begin{aligned}(2 - v \sin \frac{1}{2}u) \sin u &= \left(2 - \bar{v} \sin\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\bar{u}\right)\right) \sin(\pi + \bar{u}), \\ (2 - v \sin \frac{1}{2}u) \cos u &= \left(2 - \bar{v} \sin\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\bar{u}\right)\right) \cos(\pi + \bar{u}), \\ v \cos \frac{1}{2}u &= \bar{v} \cos(\pi + \bar{u}),\end{aligned}$$

więc $\Phi_2 \circ (\Phi_1)_{-1}(u, v) = (u - \pi, v)$. Stąd

$$\det D(\Phi_2 \circ (\Phi_1)_{-1})(u, v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

na prostokącie $(\pi, 2\pi) \times (-1, 1)$.

Natomiast dla $(u, v) \in (0, \pi) \times (-1, 1)$ mamy $\Phi_2 \circ (\Phi_1)_{-1}(u, v) = (\pi + u, -v)$, więc

$$\det D(\Phi_2 \circ (\Phi_1)_{-1})(u, v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

na prostokącie $(0, \pi) \times (-1, 1)$.

Atlas A nie jest więc zorientowany. Gdyby rozmaiłość M była orientowalna, to zgodnie z Lematem 2.8 można by zmienić orientację jednej z map tak, aby otrzymać atlas zorientowany. To nie jest jednak możliwe, bo wtedy jacobiany na obu składowych spójności zbioru $\Phi_1(U_1 \cap U_2) = \hat{\Phi}_1(U_1 \cap U_2)$ zmieniają jednocześnie znaki.

Niech M będzie orientowalną rozmaiłością wymiaru k z niepustym brzegiem (Definicja 2.6). Jej brzeg ∂M jest wówczas $(k-1)$ -wymiarową rozmaiłością bez brzegu (Twierdzenie 2.3 o brzegu rozmaiłości). Podstawowe pytanie jakie się nasuwa dotyczy orientowalności brzegu. Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.11 (o orientowalności brzegu rozmaiłości) *Jeżeli M jest orientowalną rozmaiłością z niepustym brzegiem, to jej brzeg ∂M jest też rozmaiłością orientowalną.*

Dowód. Niech A będzie atlasem zorientowanym rozmaitości M . Niech (Φ, U) będzie mapą tego atlasu taką, że $U \cap \partial M \neq \emptyset$. Wówczas $\Phi|_{U \cap \partial M}$ jest mapą rozmaitości ∂M (por. dowód Twierdzenia 2.3). Pokażemy, że

$$A_o = \{(\Phi|_{U \cap \partial M}, U \cap \partial M) : U \cap \partial M \neq \emptyset\} \quad (2.14)$$

jest atlasem zorientowanym rozmaitości ∂M .

Niech (Φ, U_1) będzie taką mapą atlasu A , że $U_1 \cap U \cap \partial M \neq \emptyset$. Niech

$$\Psi = \Phi_1 \circ \Phi_{-1} : \Phi(U_1 \cap U) \rightarrow \Phi_1(U_1 \cap U)$$

będzie odwzorowaniem przejścia z $\Phi(U_1 \cap U)$ na $\Phi_1(U_1 \cap U)$. Ponieważ atlas A jest zorientowany, więc

$$\mathbf{J}\Psi(\xi) = \det D\Psi(\xi) > 0 \quad \text{dla każdego } \xi \in \Phi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^k.$$

Przyjmijmy $\Psi_o = \Psi|_V$, gdzie $V = \Phi(U_1 \cap U) \cap \partial \mathbb{R}^k$ oraz niech $\Psi^{(1)}, \dots, \Psi^{(k)}$ będą współrzędnymi odwzorowania Ψ , tj. $\Psi = (\Psi^{(1)}, \dots, \Psi^{(k)})$. Mamy

$$\Psi^{(1)}(0, x_2, \dots, x_k) = 0$$

dla dowolnych $(x_2, \dots, x_k)$ takich, że $(0, x_2, \dots, x_k) \in V$, więc

$$\partial_j \Psi^{(1)}(0, x_2, \dots, x_k) = 0$$

dla $j = 2, \dots, k$. Zatem

$$0 < \mathbf{J}\Psi(0, x_2, \dots, x_k) = \partial_1 \Psi^{(1)}(0, x_2, \dots, x_k) \cdot \mathbf{J}\Psi_o(x_2, \dots, x_k). \quad (2.15)$$

Ponieważ lewa strona w równości (2.15) jest dodatnia więc żaden z czynników po prawej jej stronie nie może być równy zero. Aby udowodnić, że drugi z czynników, $\mathbf{J}\Psi_o(x_2, \dots, x_k)$, jest dodatni, wystarczy wykazać dodatniość pierwszego z czynników.

Jeżeli $(0, x_2, \dots, x_k) \in V$, to dla dostatecznie dużych $h < 0$ mamy $(h, x_2, \dots, x_k) \in \Phi(U_1 \cap U)$; zatem $\Phi_{-1}(h, x_2, \dots, x_k) \in U \cap U_1$. W konsekwencji

$$\Psi(h, x_2, \dots, x_k) = \Phi_1 \circ \Phi_{-1}(h, x_2, \dots, x_k) \in \Phi_1(U \cap U_1),$$

ma pierwszą współrzędną ujemną, bo $\Phi_1(U \cap U_1)$ jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}_-^k$. Stąd

$$\partial_1 \Psi^{(1)}(0, x_2, \dots, x_k) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} \Psi(h, x_2, \dots, x_k) \geq 0.$$

Zatem pierwszy czynnik po prawej stronie równości (2.15) jest nieujemny, a ze względu na to, że iloczyn ten jest różny od zera, czynnik ten jest dodatni. Udowodniliśmy, że $\mathbf{J}\Psi_o(x_2, \dots, x_k) > 0$, więc A_o jest atlasem zorientowanym. ■

Definicja 2.16 Niech M będzie zorientowaną rozmaitością z niepustym brzegiem ∂M i niech orientacja $\hat{\tau}$ tej rozmaitości będzie wyznaczona przez atlas A . Orientację $\hat{\tau}_o$ brzegu ∂M wyznaczoną przez atlas A_o określony wzorem (2.14) nazywamy *orientacją brzegu zgodną z orientacją rozmaitości*.

Uwaga 2.12 Niech $(U, \hat{\tau})$ będzie zorientowanym otwartym, spójnym podzbiorem w $\mathbb{R}_-^m$. Załóżmy, że $U \cap \mathbb{R}^{k-1} \neq \emptyset$ oraz, że orientacja $\hat{\tau}$ jest wyznaczona przez atlas $A = \{(\text{id}, U)\}$, a więc zgodnie z naszą umową przez bazę $(e_1, e_2, \dots, e_k)$, (por. Uwaga 2.11 (a)). Wówczas $A_o = \{(\text{id}|_{U \cap \mathbb{R}^{k-1}}, U \cap \mathbb{R}^{k-1})\}$. Jednak $\text{id}|_{U \cap \mathbb{R}^{k-1}}$ jest identycznością na zbiorze $U \cap \mathbb{R}^{k-1}$, zatem orientacja wyznaczona przez atlas A_o jest równa orientacji zadanej przez bazę $(e_2, \dots, e_k)$. Podobnie jeżeli orientacja $\hat{\tau}$ jest wyznaczona atlas $\hat{A} = \{(\hat{\text{id}}, U)\}$, a więc przez bazę $(e_1, e_2, \dots, e_{k-1}, -e_k)$, to orientacja brzegu zgodna z orientacją zbioru U wyznaczona jest przez bazę $(e_2, \dots, e_{k-1}, -e_k)$.

Uogólniając, jeżeli dane są orientacja $\hat{\tau}$ zbioru $U \subset \mathbb{R}_-^k$ i orientacja brzegu ∂U zadana przez bazę $(v_2, \dots, v_k)$, zgodna z orientacją $\hat{\tau}$, to baza $(e_1, v_2, \dots, v_k)$ wyznacza orientację $\hat{\tau}$.

Rozdział 3

Formy różniczkowe

W poprzednim rozdziale zajmowaliśmy się różniczkowymi z brzegiem i bez brzegu. W tym rozdziale wprowadzimy pojęcie formy różniczkowej, które będzie odgrywać zasadnicze znaczenie w naszych rozważaniach. Teoria form różniczkowych została rozwinięta przez matematyka francuskiego Elie Cartana¹. Dzieło Cartana zostało zainspirowane przez prace Hermanna Grassmanna² dotyczące form wieloliniowych, w szczególności form antysymetrycznych. Tym zagadnieniom poświęcimy następny paragraf.

3.1 Formy wieloliniowe

Rozszerzymy obecnie pojęcie formy liniowej (Definicja 2.10) na odwzorowania wielu zmiennych.

Definicja 3.1 Niech E będzie modulem nad algebrą przemenną $\mathcal{A}$. Odwzorowanie

$$F : \underbrace{E \times \dots \times E}_{n \text{ razy}} \longrightarrow \mathcal{A}$$

¹Elie Cartan (1869-1951), matematyk francuski, profesor uniwersytetu w Nancy i paryskiej Sorbony. Autor wielu fundamentalnych prac z zakresu teorii grup, algebr Liego, geometrii i topologii różniczkowej. Teorię form różniczkowych rozwinął w latach 1894-1904.

²Hermann Grassmann (1809-1877), matematyk niemiecki, nauczyciel gimnazjum w Szczecinie, zajmował się algebrą liniową.

nazywamy *formą $\mathcal{A}$ -wieloliniową rzędu n* , jeżeli jest formą liniową ze względu na każdy argument, tzn.

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x'_i + x''_i, \dots, x_n) &= F(x_1, x_2, \dots, x'_i, \dots, x_n) + \\ &\quad F(x_1, x_2, \dots, x''_i, \dots, x_n), \\ F(x_1, x_2, \dots, ax_i, \dots, x_n) &= aF(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \end{aligned}$$

dla każdych $x_1, x_2, \dots, x_i, x'_i, x''_i, \dots, x_n \in E$ i $a \in \mathcal{A}$.

Uwaga 3.1 Rodzina $\mathcal{T}^n(E)$ wszystkich form $\mathcal{A}$ -wieloliniowych określonych na module E jest modulem przy działaniach

$$\begin{aligned} (F + G)(x_1, \dots, x_n) &= F(x_1, \dots, x_n) + G(x_1, \dots, x_n), \\ (aF)(x_1, \dots, x_n) &= aF(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

dla każdych $x_1, \dots, x_n \in E$ i $a \in \mathcal{A}$, $F, G \in \mathcal{T}^n(E)$ (Zad. 6.1).

Definicja 3.2 Niech σ będzie dowolną permutacją zbioru liczb $\{1, 2, \dots, n\}$, a ε_σ jej sygnaturą (por. §5.5). Formę $\mathcal{A}$ -wieloliniową F nazywamy *symetryczną*, gdy

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

dla każdej permutacji σ , natomiast F nazywamy *antysymetryczną* (lub *alternującą*), gdy

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varepsilon_\sigma F(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Twierdzenie 3.1 (o odwzorowaniach antisymetrycznych) *Odwzorowanie $\mathcal{A}$ -wieloliniowe F jest antisymetryczne wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

jeżeli przynajmniej dwa spośród wektorów $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ są sobie równe.

Dowód. (a) Dostateczność. Niech forma wieloliniowa będzie antisymetryczna. Przypuśćmy, że $x_i = x_j$ dla pewnych i, j , takich, że $i < j$. Niech σ będzie transpozycją liczb i oraz j , tj. $\sigma(m) = m$ gdy $m \neq i, m \neq j$, $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$. Sygnatura tej permutacji jest równa $\varepsilon_\sigma = -1$, (Zad. 6.2), więc

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = -F(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Z drugiej strony,

$$\begin{aligned} F(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) &= F(x_1, x_2, \dots, x_{\sigma(i)}, \dots, x_{\sigma(j)}, \dots, x_n) = \\ &= F(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \end{aligned}$$

bo $x_i = x_j$. Zatem $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.

(b) Konieczność. Każda permutacja jest złożeniem skończenie wielu transpozycji, przy czym sygnatura złożenia jest iloczynem sygnatur tych transpozycji (Zad. 6.3). Wystarczy więc udowodnić, że $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varepsilon_\sigma F(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ w przypadku, gdy σ jest transpozycją dwóch sąsiednich elementów i oraz $i+1$. Dla dowolnych $x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n \in E$ mamy

$$\begin{aligned} 0 &= F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) = \\ &= F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_i, x_{i+2}, \dots, x_n) + \\ &+ F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_i, x_{i+2}, \dots, x_n) + \\ &+ F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) + \\ &+ F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) = \\ &= F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_i, x_{i+2}, \dots, x_n) + \\ &+ F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

więc

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varepsilon_\sigma F(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

■

Definicja 3.3 Niech $F : E \times \dots \times E \rightarrow \mathcal{A}$ będzie formą $\mathcal{A}$ -wieloliniową rzędu n na E i niech $\mathcal{S}_n$ będzie zbiorem wszystkich permutacji zbioru $\{1, \dots, n\}$. Oznaczmy dla każdego σ przez F_σ formę $\mathcal{A}$ -wieloliniową określoną równością

$$F_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

dla $x_i \in E$, $i = 1, \dots, n$. Odwzorowanie $\mathbb{S}F$ dane równością

$$\mathbb{S}F = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} F_\sigma$$

nazywamy *symetryzacją formy* F , a odwzorowanie $\mathbb{A}F$ dane równością

$$\mathbb{A}F = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon_\sigma F_\sigma$$

nazywamy *antysymetryzacją formy* F .

Uwaga 3.2 Niech F będzie formą $\mathcal{A}$ -wieloliniową rzędu n na E . Wówczas symetryzacja $\mathbb{S}F$ formy F jest symetryczną formą $\mathcal{A}$ -wieloliniową rzędu n na E , a antysymetryzacja $\mathbb{A}F$ formy F jest antysymetryczną formą $\mathcal{A}$ -wieloliniową rzędu n na E . Jeżeli forma F jest symetryczna to $\mathbb{S}F = F$, jeżeli forma F jest antysymetryczna, to $\mathbb{A}F = F$.

Czytelnik zechce przeprowadzić samodzielnie dowód tego stwierdzenia (Zad. 6.4).

Uwaga 3.3 (a) Formy $\mathcal{A}$ -liniowe są formami $\mathcal{A}$ -wieloliniowymi rzędu 1. Jedyną permutacją σ zbioru jednoelementowego jest identyczność, przy czym $\varepsilon_\sigma = 1$, dlatego taka forma jest zarazem symetryczna jak i antysymetryczna. Jak Czytelnik łatwo zauważy (Zad. 6.5), jeżeli rząd formy $\mathcal{A}$ -wieloliniowej jest równy $n > 1$ to jedyną formą równocześnie symetryczną i antysymetryczną jest forma F tożsamościowo równa 0.

(b) Rodzina wszystkich form $\mathcal{A}$ -wieloliniowych antysymetrycznych rzędu n , określonych na module E tworzy moduł nad algebrą $\mathcal{A}$ z naturalnie określonymi działaniami dodawania i mnożenia przez skalar (por. Uwaga 3.1). Moduł ten będziemy oznaczali przez $\Lambda^n(E)$.

W dalszym ciągu będziemy się zajmowali głównie formami antysymetrycznymi.

Przykład 3.1 Niech E będzie *modułem wolnym* wymiaru n nad algebrą $\mathcal{A}$, tj. modułem posiadającym bazę $v_1, \dots, v_n$ złożoną z n elementów. Niech $x_1, \dots, x_k$ będą wektorami z modułu E , przy czym $1 \leq k \leq n$. Każdy z tych wektorów można przedstawić jednoznacznie w postaci

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} v_j, \quad \text{gdzie } a_{i,j} \in \mathcal{A} \quad (3.1)$$

dla $i = 1, 2, \dots, k$, oraz $j = 1, 2, \dots, n$. Niech $j_1, j_2, \dots, j_k$ będą liczbami całkowitymi takimi, że $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$. Zauważmy, że odwzorowanie

$$F_{j_1, j_2, \dots, j_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) = a_{1, j_1} \cdot a_{2, j_2} \cdot \dots \cdot a_{k, j_k}$$

jest formą $\mathcal{A}$ -wieloliniową rzędu k , (Zad. 6.6). Dokonajmy jej antysymetryzacji. Posługując się definicją wyznacznika możemy otrzymać formę

$\mathbb{A}F_{j_1, j_2, \dots, j_k}$ zapisać następująco

$$\begin{aligned} \mathbb{A}F_{j_1, j_2, \dots, j_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \varepsilon_\sigma F_{j_1, j_2, \dots, j_k}(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \varepsilon_\sigma a_{\sigma(1), j_1} \cdot a_{\sigma(2), j_2} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(k), j_k} = \\ &= \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} a_{1, j_1} & \dots & a_{1, j_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k, j_1} & \dots & a_{k, j_k} \end{vmatrix} = \frac{1}{k!} \Delta_{j_1, j_2, \dots, j_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) \end{aligned}$$

gdzie

$$\Delta_{j_1, j_2, \dots, j_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) = \det(a_{m, j_\ell})_{m, \ell=1}^k.$$

Okazuje się, że powyższe formy są w zasadzie jedynymi formami antysymetrycznymi określonymi na module wolnym wymiaru n . Zachodzi mianowicie następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.2 (o reprezentacji formy antysymetrycznej) *Niech E będzie modulem wolnym wymiaru n nad algebrą przemienną $\mathcal{A}$, a $\{v_1, \dots, v_n\}$ jego bazą. Wówczas:*

(a) *Jeżeli $1 \leq k < n$, to każda forma antysymetryczna F rzędu k jest postaci*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} b_{j_1, j_2, \dots, j_k} \Delta_{j_1, j_2, \dots, j_k}(x_1, x_2, \dots, x_k),$$

gdzie $x_1, x_2, \dots, x_k \in E$, $b_{j_1, j_2, \dots, j_k} \in \mathcal{A}$, a $\Delta_{j_1, j_2, \dots, j_k}$ są formami wieloliniowymi określonymi w Przykładzie 3.1, przy czym sumowanie dokonuje się po wszystkich różnych układach liczb naturalnych $j_1, j_2, \dots, j_k$ takich, że $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$. Formy $\Delta_{j_1, j_2, \dots, j_k}$ są liniowo niezależnymi elementami modułu $\Lambda^k(E)$.

(b) *Jeżeli $k = n$, to każda forma wieloliniowa antysymetryczna rzędu k jest postaci*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_{1, 2, \dots, n} \Delta_{1, 2, \dots, n}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

gdzie $b_{1, 2, \dots, n} \in \mathcal{A}$.

(c) *Jeżeli $k > n$, to jedyną formą wieloliniową antysymetryczną rzędu k jest forma tożsamościowo równa 0.*

Dowód. Niech $x_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} v_j$, $i = 1, 2, \dots, n$ i niech F będzie formą wieloliniową antysymetryczną rzędu k . Z definicji formy wieloliniowej mamy

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{1 \leq j_1, j_2, \dots, j_k \leq n} a_{1,j_1} a_{2,j_2} \dots a_{k,j_k} F(v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_k}).$$

Ponieważ forma F jest antysymetryczna, więc na podstawie Twierdzenia 3.1 zachodzi $F(v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_k}) = 0$ jeśli chociaż dwa spośród wskaźników $j_1, j_2, \dots, j_k$ są sobie równe. Zatem, jeśli $k \leq n$ to

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_k) &= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_k} a_{1,j_{\sigma(1)}} a_{2,j_{\sigma(2)}} \dots a_{k,j_{\sigma(k)}} F(v_{j_{\sigma(1)}}, v_{j_{\sigma(2)}}, \dots, v_{j_{\sigma(k)}}) = \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} \left(\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_k} \varepsilon_{\sigma} a_{1,j_{\sigma(1)}} a_{2,j_{\sigma(2)}} \dots a_{k,j_{\sigma(k)}} \right) F(v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_k}) = \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} b_{j_1, j_2, \dots, j_k} \Delta_{j_1, j_2, \dots, j_k}(x_1, x_2, \dots, x_k), \end{aligned}$$

gdzie $b_{j_1, j_2, \dots, j_k} = F(v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_k})$.

Jeżeli $k = n$ to ostatnia suma składa się tylko z jednego składnika, co dowodzi (b). Jeśli natomiast $k > n$, to wszystkie wyrażenia $F(v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_k})$ są równe 0, więc F jest formą zerową.

Pozostało do wykazania, że jeżeli $k < n$ to formy $\Delta_{j_1, j_2, \dots, j_k}$ są liniowo niezależne. Obliczając współczynniki $a_{i,j}$ w równości (3.1) w przypadku gdy $x_m = v_{i_m}$, gdzie $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, $m = 1, 2, \dots, k$, zauważamy, że zachodzą równości

$$\begin{aligned} \Delta_{j_1, j_2, \dots, j_k}(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}) &= \\ &= \begin{cases} 0 & \text{gdy } (j_1, j_2, \dots, j_k) \neq (i_1, i_2, \dots, i_k), \\ 1 & \text{gdy } (j_1, j_2, \dots, j_k) = (i_1, i_2, \dots, i_k), \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2)$$

(Zad. 6.7). W przypadku gdy $(j_1, j_2, \dots, j_k) \neq (i_1, i_2, \dots, i_k)$ mamy bowiem do czynienia z wyznacznikiem macierzy, której przynajmniej jedna kolumna jest złożona z samych zer, a gdy $(j_1, j_2, \dots, j_k) = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ to odpowiednia macierz jest macierzą diagonalną, mającą na głównej przekątnej same jedynki. Przypuśćmy, że przy pewnym współczynnikach $c_{j_1, j_2, \dots, j_k}$ zachodzi

$$\sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} c_{j_1, j_2, \dots, j_k} \Delta_{j_1, j_2, \dots, j_k} = 0.$$

Wtedy

$$c_{i_1, i_2, \dots, i_k} = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} c_{j_1, j_2, \dots, j_k} \Delta_{j_1, j_2, \dots, j_k}(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}) = 0,$$

więc $c_{i_1, i_2, \dots, i_k} = 0$ dla każdego układu $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ takiego, że $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$. Wykazaliśmy liniową niezależność $\Delta_{j_1, j_2, \dots, j_k}$. ■

Wniosek 3.1 *Jeżeli E jest modulem wolnym wymiaru n nad algebrą przemenną $\mathcal{A}$, to $\Lambda^k(E)$ jest również modulem wolnym nad $\mathcal{A}$, przy czym jego wymiar jest równy*

$$\dim \Lambda^k(E) = \begin{cases} \binom{n}{k} & \text{gdy } 1 \leq k \leq n \\ 0 & \text{gdy } k > n \end{cases}$$

Bazę modułu $\Lambda^k(E)$ przy $k \leq n$ stanowią formy antysymetryczne $\Delta_{j_1, j_2, \dots, j_k}$ przy $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$.

Dowód tego wniosku wynika bezpośrednio z Twierdzenia 3.2 o ile uwzględnić fakt, że przy $1 \leq k \leq n$ liczba uporządkowanych układów $j_1, j_2, \dots, j_k$ spełniających nierówności $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ jest równa $\binom{n}{k}$. ■

3.2 Iloczyny tensorowe i zewnętrzne form wieloliniowych

Pokażemy teraz, że każdą formę antysymetryczną rzędu k można zapisać przy pomocy form rzędu pierwszego i działania zwanego iloczynem zewnętrznym form wieloliniowych. Wpierw jednak zdefiniujemy iloczyn tensorowy form.

Definicja 3.4 Niech E będzie modulem nad algebrą przemenną $\mathcal{A}$. Dla $F \in \mathcal{T}^m(E)$ i $G \in \mathcal{T}^k(E)$ (por. Uwaga 3.1) określamy nowe odwzorowanie $F \otimes G$ wzorem

$$F \otimes G(x_1, x_2, \dots, x_{m+k}) = F(x_1, x_2, \dots, x_m) G(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{m+k})$$

dla $x_1, x_2, \dots, x_{m+k} \in E$. Odwzorowanie

$$F \otimes G : \underbrace{E \times \dots \times E}_{m+k \text{ razy}} \longrightarrow \mathcal{A}$$

nazywamy *iloczynem tensorowym form F i G* .

Uwaga 3.4 Iloczyn tensorowy $F \otimes G$ form $F \in \mathcal{T}^m(E)$ i $G \in \mathcal{T}^k(E)$ jest formą wieloliniową rzędu $m + k$ nad E , tj. $F \otimes G \in \mathcal{T}^{m+k}(E)$.

Zachodzą następujące własności iloczynu tensorowego.

Uwaga 3.5 Niech $F_1, F_2 \in \mathcal{T}^m(E)$, $G_1, G_2 \in \mathcal{T}^k(E)$ i $H \in \mathcal{T}^\ell(E)$. Wówczas,

- (a) $(aF_1) \otimes G_1 = F_1 \otimes (aG_1) = a(F_1 \otimes G_1)$ dla dowolnego $a \in \mathcal{A}$,
- (b) $(F_1 + F_2) \otimes G_1 = F_1 \otimes G_1 + F_2 \otimes G_1$ i $F_1 \otimes (G_1 + G_2) = F_1 \otimes G_1 + F_1 \otimes G_2$,
- (c) $(F_1 \otimes G_1) \otimes H = F_1 \otimes (G_1 \otimes H)$.

Czytelnik zechce przeprowadzić dowód we własnym zakresie (Zad. 6.8).

Uwaga 3.6 Jak zawsze w przypadku działania łącznego z punktu (c) wynika, że zapis $F_1 \otimes \dots \otimes F_k$, gdzie $F_i \in \mathcal{T}^{m_i}(E)$ dla $i = 1, \dots, k$ nie prowadzi do nieporozumień i określa jednoznacznie (poprzez indukcję) formę wieloliniową rzędu $m_1 + m_2 + \dots + m_k$.

Przykład 3.2 Niech E będzie modulem wolnym wymiaru n nad algebrą przemienną $\mathcal{A}$, a $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ niech będzie jego bazą. Niech v_i^* będzie formą liniową przyporządkowującą każdemu wektorowi $x \in E$ jego i -tą współrzędną, tzn. $v_i^*(x) = a_i$ jeżeli $x = \sum_{i=1}^n a_i v_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$). Wówczas mamy

$$x = \sum_{i=1}^n v_i^*(x) v_i.$$

Przy $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$, formy $F_{j_1, j_2, \dots, j_k}$ określone w Przykładzie 3.1 są iloczynami tensorowymi form $v_{j_i}^*$ ($i=1, 2, \dots, k$), tj.

$$F_{j_1, j_2, \dots, j_k} = v_{j_1}^* \otimes v_{j_2}^* \otimes \dots \otimes v_{j_k}^*, \quad (3.3)$$

bowiem

$$\begin{aligned} F_{j_1, j_2, \dots, j_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) &= a_{1, j_1} a_{2, j_2} \dots a_{k, j_k} = \\ &= v_{j_1}^*(x_1) v_{j_2}^*(x_2) \dots v_{j_k}^*(x_k) = v_{j_1}^* \otimes v_{j_2}^* \otimes \dots \otimes v_{j_k}^*(x_1, x_2, \dots, x_k). \end{aligned}$$

Przykład powyższy pokazuje m.in., że iloczyn tensorowy form antysymetrycznych nie musi być formą antysymetryczną. Formy po prawej stronie równości (3.3), jako formy rzędu 1, są wszystkie antysymetryczne, a forma $F_{j_1, j_2, \dots, j_k}$ po lewej stronie (3.3) nie musi być antysymetryczna.

Aby otrzymać formy antysymetryczne dokonamy antysymetryzacji iloczynu tensorowego, z pewnym normującym współczynnikiem kombinatorycznym. Taką antysymetryzację nazwiemy iloczynem zewnętrznym.

Definicja 3.5 (a) Jeśli $F \in \mathcal{T}^m(E)$ i $G \in \mathcal{T}^k(E)$, to odwzorowanie

$$F \wedge G = \frac{(m+k)!}{m!k!} \mathbb{A}(F \otimes G)$$

nazywamy *iloczynem zewnętrznym* form F i G .

Uwaga 3.7 Symbol $\mathbb{A}$ oznacza tu antysymetryzację formy (por. Definicja 3.3). Na podstawie Uwagi 3.4 wnosimy, że $\mathbb{A}(F \otimes G)$, a zatem $F \wedge G$, jest formą antysymetryczną rzędu $m+k$.

(b) Czytelnik zechce sprawdzić (Zad. 6.9), że bezpośrednio z definicji iloczynu zewnętrznego wynika wzór

$$F \wedge G(x_1, x_2, \dots, x_{m+k}) = \frac{1}{m!k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{m+k}} \varepsilon_\sigma F(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(k)}) G(x_{\sigma(m+1)}, x_{\sigma(m+2)}, \dots, x_{\sigma(m+k)}). \quad (3.4)$$

W dalszym ciągu zajmujemy się jedynie iloczynami zewnętrznymi form antysymetrycznych.

Twierdzenie 3.3 (własności iloczynu zewnętrznego) Niech $F_1, F_2 \in \Lambda^k(E)$, $G_1, G_2 \in \Lambda^m(E)$ i $H \in \Lambda^\ell(E)$. Wówczas,

- (a) $(aF_1) \wedge G_1 = F_1 \wedge (aG_1) = a(F_1 \wedge G_1)$ dla dowolnego $a \in \mathcal{A}$,
- (b) $(F_1 + F_2) \wedge G_1 = F_1 \wedge G_1 + F_2 \wedge G_1$ i $F_1 \wedge (G_1 + G_2) = F_1 \wedge G_1 + F_1 \wedge G_2$,
- (c) $(F_1 \wedge G_1) \wedge H = F_1 \wedge (G_1 \wedge H)$,
- (d) $F_1 \wedge G_1 = (-1)^{km} G_1 \wedge F_1$.

Dowód. Pozostawiając Czytelnikowi do wykazania własności (a), (b) i (c) (Zad. 6.10) ograniczymy się do dowodu własności (d), pomijając dla prostoty w oznaczeniach wskaźnik 1. Niech permutacja $\sigma \in \mathcal{S}_{k+m}$ będzie dowolna. Przyporządkujemy jej permutację

$$\tilde{\sigma}(i) = \begin{cases} \sigma(k+i) & \text{dla } 1 \leq i \leq m, \\ \sigma(i-m) & \text{dla } m+1 \leq i \leq m+k. \end{cases}$$

Czytelnik łatwo sprawdzi, że

$$\varepsilon_\sigma = (-1)^{km} \varepsilon_{\tilde{\sigma}},$$

więc

$$\begin{aligned} \varepsilon_\sigma F(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(k)}) G(x_{\sigma(k+1)}, x_{\sigma(k+2)}, \dots, x_{\sigma(m+k)}) &= \\ (-1)^{km} \varepsilon_{\tilde{\sigma}} G(x_{\tilde{\sigma}(1)}, x_{\tilde{\sigma}(2)}, \dots, x_{\tilde{\sigma}(m)}) F(x_{\tilde{\sigma}(m+1)}, x_{\tilde{\sigma}(m+2)}, \dots, x_{\tilde{\sigma}(m+k)}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Przyporządkowanie $\mathcal{S}_{m+k} \ni \sigma \mapsto \tilde{\sigma} \in \mathcal{S}_{m+k}$ jest wzajemnie jednoznaczne, więc sumując równości (3.5) stronami po wszystkich permutacjach z $\mathcal{S}_{m+k}$ otrzymujemy równość

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{m+k}} \varepsilon_{\sigma} F(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(k)}) G(x_{\sigma(k+1)}, x_{\sigma(k+2)}, \dots, x_{\sigma(m+k)}) =$$

$$(-1)^{km} \sum_{\tilde{\sigma} \in \mathcal{S}_{m+k}} G(x_{\tilde{\sigma}(1)}, x_{\tilde{\sigma}(2)}, \dots, x_{\tilde{\sigma}(m)}) F(x_{\tilde{\sigma}(m+1)}, x_{\tilde{\sigma}(m+2)}, \dots, x_{\tilde{\sigma}(m+k)}).$$

Na podstawie wzoru (3.4) po obustronnym pomnożeniu przez $\frac{1}{m!k!}$ lewa strona ostatniej równości jest równa $F \wedge G(x_1, \dots, x_{m+k})$, a prawa jest równa $(-1)^{km} G \wedge F(x_1, \dots, x_{m+k})$. Zatem $F \wedge G = (-1)^{km} G \wedge F$, co kończy dowód równości (d). ■

Przykład 3.3 Niech $E, \mathcal{A}$, i v_i^* będą takie jak w Przykładzie (3.2). Niech $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$. Pokażemy, że

$$v_{j_1}^* \wedge v_{j_2}^* \wedge \dots \wedge v_{j_k}^* = \Delta_{j_1, j_2, \dots, j_k}. \quad (3.6)$$

Założmy najpierw, że $k = 2$. Niech

$$x_1 = \sum_{i=1}^n a_{1,i} v_i \quad \text{ i } \quad x_2 = \sum_{i=1}^n a_{2,i} v_i.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} v_{j_1}^* \wedge v_{j_2}^*(x_1, x_2) &= \frac{2!}{1!1!} \mathbb{A}(v_{j_1}^* \otimes v_{j_2}^*)(x_1, x_2) = \\ &= 2 \frac{1}{2!} [v_{j_1}^*(x_1) v_{j_2}^*(x_2) - v_{j_1}^*(x_2) v_{j_2}^*(x_1)] = \\ &= (a_{1,j_1} a_{2,j_2} - a_{2,j_1} a_{1,j_2}) = \Delta_{j_1, j_2}(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy więc równość (3.6) w przypadku gdy $k = 2$. W przypadku ogólnym wykażemy (3.6) przez indukcję zupełną. Przypuśćmy, że (3.6) jest prawdziwe dla $k - 1$, gdzie $2 < k \leq n$. Wystarczy pokazać, że (3.6) jest wówczas prawdziwe także dla k . Na podstawie założenia indukcyjnego mamy

$$v_{j_1}^* \wedge v_{j_2}^* \wedge \dots \wedge v_{j_{k-1}}^* = \Delta_{j_1, j_2, \dots, j_{k-1}}.$$

Stąd

$$v_{j_1}^* \wedge v_{j_2}^* \wedge \dots \wedge v_{j_k}^* = \left(v_{j_1}^* \wedge v_{j_2}^* \wedge \dots \wedge v_{j_{k-1}}^* \right) \wedge v_{j_k}^* = \Delta_{j_1, j_2, \dots, j_{k-1}} \wedge v_{j_k}^*.$$

Zatem dla dowolnych $x_1, \dots, x_k \in E$ mamy

$$\begin{aligned} v_{j_1}^* \wedge v_{j_2}^* \wedge \dots \wedge v_{j_k}^*(x_1, \dots, x_k) &= \frac{k!}{(k-1)!} \mathbb{A}(\Delta_{j_1, j_2, \dots, j_{k-1}} \wedge v_{j_k}^*)(x_1, \dots, x_k) \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \varepsilon_\sigma \Delta_{j_1, j_2, \dots, j_{k-1}}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k-1)}) v_{j_k}^*(x_{\sigma(k)}). \end{aligned}$$

Z drugiej strony mamy

$$\begin{aligned} \Delta_{j_1, j_2, \dots, j_k}(x_1, \dots, x_k) &= \begin{vmatrix} a_{1, \sigma(1)}, & \dots, & a_{1, \sigma(k)} \\ \dots, & \dots, & \dots \\ a_{k, \sigma(1)}, & \dots, & a_{k, \sigma(k)} \end{vmatrix} = \\ \sum_{i=1}^k (-1)^{k+i} a_{i, j_k} \Delta_{j_1, j_2, \dots, j_{k-1}}(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_k) &= \\ \frac{1}{(k-1)!} \sum_{i=1}^k (-1)^{k+i} \sum_{\tilde{\sigma} \in \mathcal{S}_{k-1}} \varepsilon_{\tilde{\sigma}} \Delta_{j_1, j_2, \dots, j_{k-1}}(x_{\sigma(1)}, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{\sigma(k)}) v_{j_k}^*(x_i) \end{aligned}$$

gdzie symbol $\widehat{x}_i$ oznacza, że wektor x_i należy opuścić.

Niech $\sigma \in \mathcal{S}_k$ będzie taką permutacją, że $\sigma(k) = i$. Wówczas istnieje dokładnie jedna permutacja $\tilde{\sigma} \in \mathcal{S}_{k-1}$ taka, że

$$(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k-1)}, x_{\sigma(k)} = x_i) = (x_{\tilde{\sigma}(1)}, \dots, x_{\tilde{\sigma}(k-1)}, x_i).$$

Wówczas

$$\varepsilon_\sigma = (-1)^{k-i} \varepsilon_{\tilde{\sigma}} = (-1)^{k+i} \varepsilon_{\tilde{\sigma}}.$$

Ponieważ każdą permutację $\sigma \in \mathcal{S}_k$ można jednoznacznie przedstawić w powyższy sposób, więc

$$v_{j_1}^* \wedge v_{j_2}^* \wedge \dots \wedge v_{j_k}^* = \Delta_{j_1, j_2, \dots, j_k},$$

co kończy dowód indukcyjny równości (3.6).

Wniosek 3.2 *Jeżeli E jest modulem wolnym z bazą $\{v_1, \dots, v_n\}$ to każdą formę wieloliniową antysymetryczną rzędu k , $1 \leq k \leq n$ można przedstawić jednoznacznie w postaci*

$$F = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} b_{j_1, \dots, j_k} v_{j_1}^* \wedge v_{j_2}^* \wedge \dots \wedge v_{j_k}^*,$$

gdzie $b_{j_1, \dots, j_k} \in \mathcal{A}$.

3.3 Formy różniczkowe

Niech M będzie rozmaitością różniczkową wymiaru k w $\mathbb{R}^m$, $C^\infty(M)$ - algebrą funkcji gładkich na rozmaitości M (Definicja 2.8 (c)), a $\Gamma(M)$ - modulem pól wektorowych określonych na M (por. §5.4, uwagi wstępne).

Definicja 3.6 *Formą różniczkową rzędu n na rozmaitości różniczkowej M nazywamy każdą $C^\infty(M)$ -wieloliniową, antysymetryczną formę rzędu n określoną na module $\Gamma(M)$.*

Uwaga 3.8 Podobnie jak w przypadku zbioru otwartego $U \subset \mathbb{R}^m$ możemy określić algebrę $C^r(M)$ funkcji klasy C^r na rozmaitości M oraz pola wektorowe klasy C^r na rozmaitości M , $r \in \mathbb{N}$. To skośności pozwala na wprowadzenie *formy różniczkowej klasy C^r , rzędu n* jako formy $C^r(M)$ -wieloliniowej, antysymetrycznej rzędu n określonej na module pól wektorowych klasy C^r .

Uwaga 3.9 Rodzina wszystkich form różniczkowych rzędu n określonych na rozmaitości M tworzy moduł $\Lambda^n(\Gamma(M))$ nad algebrą $C^\infty(M)$. Dla uproszczenia zapisu będziemy go oznaczać $\mathcal{D}^n(M)$, $k = 1, 2, \dots$. W dalszych rozważaniach będzie dogodnie uważać funkcje gładkie za formy różniczkowe rzędu zero, przyjmując $\mathcal{D}^0(M) = C^\infty(M)$. Rozszerzymy przy tym operację mnożenia zewnętrznego na formy rzędu zero przyjmując, że iloczyn zewnętrzny formy rzędu zero f i dowolnej formy różniczkowej ω jest równy zwykłemu iloczynowi formy wieloliniowej przez element pierścienia, t.j. $f \wedge \omega = f \cdot \omega$.

Na początku szczególną uwagę poświęcimy formom różniczkowym rzędu 1, a zwłaszcza różniczce. Przypomnijmy podstawowe pojęcia. Niech $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie U jest niepustym zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^m$, będzie funkcją różniczkowalną w każdym punkcie $x \in U$. Wówczas

$$df(x, a) = Df(x)a^* = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)a_j = \sum_{j=1}^m a_j \partial_j f(x) \quad (3.7)$$

jest różniczką funkcji f w punkcie $x \in U$ dla przyrostu $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ (II, Część 1, Definicja 1.1 i Twierdzenie 1.4). Różniczkę tę można interpretować jako pochodną kierunkową funkcji F w punkcie x w kierunku wektora a , tj. $df(x, a) = \frac{\partial f}{\partial a}(x)$ (II, Część 1, Twierdzenie 1.16).

W równości (3.7) współrzędne $a_1, a_2, \dots, a_m$ są stałymi. Rozszerzymy obecnie definicję różniczki przyjmując, że $a_1, a_2, \dots, a_m$ są funkcjami,

należącymi do $C^\infty(U)$. Wzór (3.7) przyjmuje wówczas zapis

$$df(x, a(x)) = \sum_{j=1}^m a_j(x) \partial_j f(x) \quad \text{dla } x \in U. \quad (3.8)$$

Wiemy jednak, że prawa strona równości (3.8) stanowi ogólną postać pola wektorowego $X \in \Gamma(U)$, więc $df(x, a(x)) = Xf(x)$ dla każdego $x \in U$, gdzie $X = \sum_{j=1}^m a_j \partial_j$. Zatem $df(\cdot, a(\cdot))$ (gdzie zmienną x zastąpiliśmy kropką) jest formą liniową odwzorowującą zbiór $\Gamma(U)$ wszystkich pól wektorowych w przestrzeń $C^1(U)$. Jeżeli ograniczymy się do $f \in C^\infty(U)$ to forma ta odwzorowuje $\Gamma(U)$ w $C^\infty(U)$. W szczególności biorąc $f_i(x) = x_i$, gdzie $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, mamy

$$df_i(x, a(x)) = X(f_i)(x) = \sum_{j=1}^m a_j(x) \frac{\partial x_i}{\partial x_j}(x) = a_i(x). \quad (3.9)$$

Formę uogólniającą pojęcie różniczki $df(\cdot, a)$, nazywać będziemy także różniczką funkcji $f \in C^\infty(U)$.

Definicja 3.7 Niech $f \in C^\infty(M)$, gdzie M jest rozmaitością różniczkową. Formę różniczkową rzędu 1 przyporządkowującą każdemu polu wektorowemu $X \in \Gamma(M)$ funkcję $X(f) \in C^\infty(M)$ nazywamy *różniczką funkcji f* i oznaczamy df :

$$df(X) = X(f).$$

Uwaga 3.10 (a) Formę rzędu 1 określoną równością (3.9) będziemy oznaczać przez dx_i . Jeżeli U jest otwartym zbiorem w $\mathbb{R}^m$ a pole wektorowe $X \in \Gamma(U)$ jest określone wzorem $X = \sum_{j=1}^m a_j \partial_j$, $a_j \in C^\infty(U)$, to

$$dx_i(X) = a_i.$$

Zatem zgodnie z oznaczeniami wprowadzonymi w Przykładzie 3.2

$$dx_i = (\partial_i)^*,$$

gdź pola wektorowe $\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_m$ są bazą modułu $\Gamma(U)$.

(b) Z Wniosku 3.2 oraz punktu (a) konkludujemy, że w przypadku zbioru otwartego U w $\mathbb{R}^m$, każda forma różniczkowa ω rzędu k na U jest postaci

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq m} a_{j_1, j_2, \dots, j_k} dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_k},$$

gdzie $a_{j_1, j_2, \dots, j_k} \in C^\infty(U)$. Co więcej, rodzina

$$\{ dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \}_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq m}$$

jest bazą w $\mathcal{D}^k(U)$. Zatem $\mathcal{D}^k(U)$ jest modulem wolnym nad $C^\infty(U)$ wymiaru $\binom{m}{k}$ dla $1 \leq k \leq m$ i $\mathcal{D}^k(U) = \{0\}$ gdy $k > m$.

(c) Wprost z definicji wynika, że dla dowolnego pola wektorowego $X \in \Gamma(U)$ wartość funkcji $dx_i(X)$ w punkcie $x \in U$ zależy jedynie od wartości pola X w punkcie x , a nie zależy od jego wartości w innych punktach zbioru U (por. punkt (a)). Podobną własność mają wszystkie formy różniczkowe na U , a mianowicie zachodzi następujący lemat:

Lemat 3.1 *Niech $\omega \in \mathcal{D}^k(U)$ i $X_1, X_2, \dots, X_k \in \Gamma(U)$, gdzie U jest zbiorem otwartym i niepustym w $\mathbb{R}^m$. Wartość funkcji $\omega(X_1, X_2, \dots, X_k) \in C^\infty(U)$ w punkcie $x \in U$ zależy jedynie od wartości pól wektorowych $X_1, X_2, \dots, X_k$ w punkcie x .*

Dowód. Jak stwierdziliśmy w Uwadze 3.6 (c), własność tę posiadają jednoformy bazowe dx_i . Na mocy definicji iloczynu zewnętrznego (Definicja 3.5), własność tę mają również k -formy $dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$. Zbiór tych form stanowi bazę w $\mathcal{D}^k(U)$. Zatem własność zachodzi dla wszystkich form różniczkowych rzędu k . ■

Przykład 3.4 (a) Niech $f \in C^\infty(U)$, U niepusty i otwarty w $\mathbb{R}^m$. Wówczas z definicji mamy $df(X) = X(f)$ dla każdego $X \in \Gamma(U)$. Niech $X = \sum_{j=1}^m a_j \partial_j$, gdzie $a_j \in C^\infty(U)$, będzie przedstawieniem pola X w bazie ∂_j , $j = 1, 2, \dots, m$. Wówczas

$$df(X)(x) = \sum_{j=1}^m a_j(x) \partial_j(f)(x) = \sum_{j=1}^m \partial_j(f)(x) dx_j(X)(x)$$

(por. (3.9)), więc

$$df(X)(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j,$$

(b) Formy różniczkowe rzędu m na $U \subset \mathbb{R}^m$ są postaci

$$\omega = a dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m,$$

gdzie $a \in C^\infty(U)$. W szczególności przy $a \equiv 1$ otrzymujemy formę

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m.$$

Forma ta połom wektorowym $X_1, \dots, X_m$ przyporządkowuje funkcję wyznacznikową macierzy złożonej ze współrzędnych tych pól wektorowych względem bazy $\partial_1, \dots, \partial_m$. Zatem wyrażenie

$$|\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_m(X_1, \dots, X_m)(p)|, \quad p \in U,$$

jest równe objętości m -wymiarowego równoległościanu rozpiętego przez wektory $X_1(p), \dots, X_m(p)$ (por. np. Karol Sieklucki, Geometria i topologia Cz.I, Geometria, Biblioteka Matematyczna 53, PWN Warszawa 1978, str. 349).

Zajmiemy się teraz formami różniczkowymi na rozmaitości k -wymiarowej $M \subset \mathbb{R}^m$. Pokażemy, że lokalnie, w dziedzinie każdej mapy, dowolną formę różniczkową można przedstawić w podobny sposób jak formy określone na zbiorach otwartych w $\mathbb{R}^m$. Ponadto wykażemy, że nie istnieją niezerowe formy rzędu większego niż $\dim M$.

Lemat 3.2 *Niech ω będzie formą różniczkową rzędu n na rozmaitości $M \subset \mathbb{R}^m$ i niech $V \subset M$ będzie podzbiorem otwartym w M . Jeżeli przynajmniej jedno z pól wektorowych $X_1, \dots, X_n \in \Gamma(M)$ zeruje się na V , tzn. istnieje taki wskaźnik i , $1 \leq i \leq n$, że dla każdego $x \in V$ zachodzi $X_i(x) = 0$, to $\omega(X_1, \dots, X_n)(x) = 0$ dla każdego $x \in V$.*

Dowód. Niech $x \in V$. Wówczas istnieje taka funkcja $f \in C^\infty(M)$, że $f(y) = 0$ dla y z pewnego otoczenia punktu x oraz $f(y) = 1$ dla $y \notin V$. Wówczas $f(y)X_i(y) = X_i(y)$ dla każdego $y \in M$. Z wieloliniowości ω otrzymujemy

$$\begin{aligned} \omega(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n)(x) &= \omega(X_1, \dots, fX_i, \dots, X_n)(x) = \\ &= f(x)\omega(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n)(x) = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Twierdzenie 3.4 (o zawężaniu formy różniczkowej) *Niech ω będzie formą różniczkową rzędu n na rozmaitości $M \subset \mathbb{R}^m$ i niech $V \subset M$ będzie niepustym podzbiorem otwartym w M . Wówczas istnieje na V forma różniczkowa rzędu n , $\omega \in \mathcal{D}^n(V)$ taka, że*

$$\omega_V(X_1|_V, \dots, X_n|_V)(x) = \omega(X_1, \dots, X_n)(x)$$

dla dowolnych pól $X_1, \dots, X_n \in \Gamma(M)$ oraz dowolnego $x \in V$.

Dowód. Niech $x \in V$. Obierzemy funkcję $\psi \in C_o^\infty(V)$, taką, że $\psi \equiv 1$ w pewnym otoczeniu V_o punktu x takim, że $V_o \subset V$. Niech $Y_1, \dots, Y_n \in \Gamma(V)$.

Ponieważ nośnik $\text{supp } \psi$ zawiera się w V , więc każde z pól wektorowych ψY_i jest równe zero poza pewnym zbiorem zwartym, zawartym w V . Możemy je więc przedłużyć jako zero do pewnego pola wektorowego określonego na M ; pole to oznaczmy również przez ψY_i . Przyjmijmy

$$\omega_V(Y_1, \dots, Y_n)(x) = \omega(\psi Y_1, \dots, \psi Y_n)(x).$$

Zauważmy, że prawa strona tej tożsamości nie zależy od ψ . Rzeczywiście, jeżeli ψ_1 jest inną funkcją o tej samej własności co ψ , to funkcja $\psi - \psi_1$ jest równa zero w pewnym otoczeniu punktu x . Zatem na podstawie Lematu 3.2, dla dowolnego i oraz dowolnych pól $Z_1, \dots, Z_{n-1} \in \Gamma(M)$ mamy

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(Z_1, \dots, Z_{i-1}, (\psi - \psi_1)Y_i, Z_{i+1}, \dots, Z_{n-1})(x) = \\ &= \omega(Z_1, \dots, Z_{i-1}, \psi Y_i, Z_{i+1}, \dots, Z_{n-1})(x) - \\ &= \omega(Z_1, \dots, Z_{i-1}, \psi_1 Y_i, Z_{i+1}, \dots, Z_{n-1})(x). \end{aligned}$$

W konsekwencji

$$\begin{aligned} \omega(\psi_1 Y_1, \dots, \psi_1 Y_n)(x) &= \omega(\psi Y_1, \psi_1 Y_2, \dots, \psi_1 Y_n)(x) = \\ \omega(\psi Y_1, \psi Y_2, \psi_1 Y_3, \dots, \psi_1 Y_n)(x) &= \dots = \omega(\psi Y_1, \psi Y_2, \dots, \psi Y_n)(x). \end{aligned}$$

Wprost z definicji wynika, że $\omega_V(Y_1, \dots, Y_n)$ jest gładką funkcją na V . Prosty rachunek pokazuje (Zad. 6.11), że ω_V jest formą $C^\infty(V)$ -wieloliniową rzędu n na $\Gamma(V)$. Zatem ω_V jest formą różniczkową rzędu n na $\Gamma(V)$.

Jeżeli $Y_i = X_i|_V$, to $\psi Y_i = \psi X_i$, zatem dla $x \in V$ zachodzi

$$\omega_V(X_1|_V, \dots, X_n|_V)(x) = \omega(\psi X_1, \dots, \psi X_n)(x).$$

Jednak funkcja ψ jest równa 1 w pewnym otoczeniu punktu x . Zatem z Lematu 3.2 wnosimy, podobnie jak poprzednio, że

$$\omega(\psi X_1, \dots, \psi X_n)(x) = \omega(X_1, \dots, X_n)(x)$$

dla każdego $x \in V$. To kończy dowód Twierdzenia 3.4. ■

Lemat 3.3 *Niech (Φ, U) będzie mapą rozmaitości k -wymiarowej M . Wówczas moduł $\mathcal{D}^n(U)$ jest wolny oraz jego wymiar $\dim \mathcal{D}^n(U) = \binom{k}{n}$, gdzie $1 \leq n \leq k$ i $\dim \mathcal{D}^n(U) = 0$ gdy $n > k$.*

Dowód. Udowodniliśmy wcześniej (Twierdzenie 1.6), że moduł pól wektorowych $\Gamma(U)$ jest wolny z bazą ∂_i^Φ , $i = 1, \dots, k$. Z poprzedniego paragrafu wynika zatem, że wolny jest również moduł $\mathcal{D}^n(M)$. ■

Wniosek 3.3 *Jeżeli $n > \dim M = k$ to $\mathcal{D}^n(M) = \{0\}$.*

Dowód. Niech $\omega \in \mathcal{D}^n(M)$. Dla dowolnego punktu $x \in M$ istnieje mapa (Φ, U) taka, że $x \in U$. Z Twierdzenia 3.4 wnosimy, że istnieje forma $\omega_U \in \mathcal{D}^n(U)$ taka, że

$$\omega_U(X_1|_U, \dots, X_n|_U)(y) = \omega(X_1, \dots, X_n)(y) \quad \text{dla } y \in U.$$

Korzystając z Lematu 3.3 otrzymujemy, że $\mathcal{D}^n(U) = \{0\}$. Zatem

$$\omega(X_1, \dots, X_n)(x) = 0$$

dla dowolnych $X_1, \dots, X_n \in \Gamma(M)$ i dowolnego $x \in M$. ■

Niech (Φ, U) będzie mapą na rozmaitości M wymiaru k . Pola wektorowe $\partial_i^\Phi \in \Gamma(U)$ określone wzorami

$$\partial_i^\Phi(f)(p) = \partial_i(f \circ \Phi_{-1})(\Phi(p)) \quad \text{dla } p \in U$$

tworzą wtedy bazę modułu $\Gamma(U)$. Dowolne pole wektorowe $X \in \Gamma(U)$ można przedstawić w postaci

$$X = \sum_{i=1}^k a_i \partial_i^\Phi, \quad \text{gdzie } a_i \in C^\infty(U).$$

Określimy formy różniczkowe rzędu 1 na U wzorem

$$dx_i^\Phi(X) = a_i \quad \text{dla } i = 1, \dots, k.$$

Z poprzedniego paragrafu i dotychczasowych rozważań wynika, że

$$dx_{i_1}^\Phi \wedge dx_{i_2}^\Phi \wedge \dots \wedge dx_{i_n}^\Phi, \quad \text{gdzie } 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq k$$

tworzą bazę modułu $\mathcal{D}^k(U)$. Pozwala nam to sformułować następujący wniosek:

Wniosek 3.4 *Niech ω będzie formą różniczkową rzędu n na rozmaitości M wymiaru k , gdzie $1 \leq n \leq k$. Wówczas dla dowolnego punktu $p \in M$ istnieje*

(a) *mapa (Φ, U) , $p \in U$,*

(b) *takie funkcje gładkie $a_{i_1, \dots, i_n} \in C^\infty(U)$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq k$, że dla dowolnych pól wektorowych $X_1, \dots, X_n \in \Gamma(M)$ i dowolnego $y \in U$ zachodzi równość*

$$\omega(X_1, \dots, X_n)(y) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq k} a_{i_1, \dots, i_n}(y) dx_{i_1}^\Phi \wedge dx_{i_2}^\Phi \wedge \dots \wedge dx_{i_n}^\Phi(X_1|_U, \dots, X_n|_U)(y).$$

Z Wniosku 3.4 i Lematu 3.1 wynika bezpośrednio następujący

Wniosek 3.5 *Niech $\omega \in \mathcal{D}^n(M)$, $1 \leq n \leq \dim M$ i $X_1, X_2, \dots, X_n \in \Gamma(M)$. Wartość funkcji $\omega(X_1, X_2, \dots, X_n) \in C^\infty(M)$ w punkcie $x \in M$ zależy jedynie od wartości pól wektorowych $X_1, X_2, \dots, X_n$ w punkcie x .*

Przykład 3.5 Niech (Φ, U) będzie mapą rozmierności M i niech

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq k} a_{i_1, \dots, i_n} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} \quad (3.10)$$

będzie formą różniczkową rzędu n określoną na $\Phi(U) \subset \mathbb{R}^m$. (por. Uwaga 3.9 (b)). Załóżmy, że dla każdego układu wskaźników $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq k$ nośniki funkcji $a_{i_1, \dots, i_n}$ są zwartymi podzbiorami zbioru otwartego $\Phi(U)$. Forma różniczkowa (3.10) definiuje pewną formę różniczkową na zbiorze U , a mianowicie

$$\tilde{\omega} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq k} a_{i_1, \dots, i_n} \circ \Phi dx_{i_1}^\Phi \wedge dx_{i_2}^\Phi \wedge \dots \wedge dx_{i_n}^\Phi$$

Nośniki funkcji $a_{i_1, \dots, i_n} \circ \Phi$ są wówczas zwartymi podzbiorami zbioru U , zatem formę $\tilde{\omega}$ można przedłużyć jako zero poza zbiór U . W ten sposób otrzymujemy formę określoną na całej rozmierności M .

Definicja 3.8 Mówimy, że *forma różniczkowa rzędu n zeruje się w punkcie $p \in M$, gdy dla dowolnych pól wektorowych $X_1, \dots, X_n \in \Gamma(M)$ zachodzi*

$$\omega(X_1, \dots, X_n)(p) = 0.$$

3.4 Przeniesienie formy różniczkowej

Omówimy teraz operację *przeniesienia formy różniczkowej*, zwaną również operacją *cofnięcia formy różniczkowej* (ang. *pull-back*). Aby określić tę operację, musimy wprawdzie omówić przeniesienie pola wektorowego.

Definicja 3.9 Niech M_1 and M_2 będą rozmiernościami różniczkowymi wymiaru k w $\mathbb{R}^m$, a $U_1 \subset M_1$ i $U_2 \subset M_2$ niech będą otwartymi podzbiorami tych rozmierności. Z każdym dyfeomorfizmem $\Phi : U_1 \rightarrow U_2$ zwiążemy odwzorowanie modułów pól wektorowych $\Phi_* : \Gamma(U_1) \rightarrow \Gamma(U_2)$, określone wzorem

$$\Phi_* X(f)(p) = X(f \circ \Phi)(\Phi^{-1}(p))$$

dla $X \in \Gamma(U_1)$, $f \in C^\infty(U_2)$ i $p \in U_2$. Odwzorowanie Φ_* nazywamy *przeniesieniem pola wektorowego*.

Uwaga 3.11 Ponieważ $X(f \circ \Phi)$ jest funkcją gładką na U_1 , więc $\Phi_*X(f) = X(f \circ \Phi) \circ \Phi_{-1}$ jest gładką funkcją na U_2 . Łatwo pokazać (Zad. 6.12), że zachodzą następujące równości:

$$\begin{aligned}\Phi_*X(f+g) &= \Phi_*X(f) + \Phi_*X(g), \\ \Phi_*X(\lambda f) &= \lambda \Phi_*X(f), \\ \Phi_*X(fg)(p) &= f(p)\Phi_*X(g)(p) + g(p)\Phi_*X(f)(p)\end{aligned}\tag{3.11}$$

dla $f, g \in C^\infty(U_2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ i $p \in U_2$. Zatem $\Phi_*X \in \Gamma(U_2)$.

Następujący lemat Czytelnik zechce udowodnić samodzielnie (Zad. 6.13):

Lemat 3.4 *Odwzorowanie $\Phi_* : \Gamma(U_1) \rightarrow \Gamma(U_2)$ jest odwzorowaniem $\mathbb{R}$ -liniowym, tzn. dla dowolnych $X_1, X_2 \in \Gamma(U_1)$ i $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ zachodzi równość*

$$\Phi_*(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \lambda_1 \Phi_*(X_1) + \lambda_2 \Phi_*(X_2).$$

Ponadto, zachodzi

$$\Phi_*(f \cdot X) = (f \circ \Phi_{-1}) \cdot \Phi_*(X)$$

dla dowolnych $X \in \Gamma(U_1)$ and $f \in C^\infty(U_1)$.

Przykład 3.6 Załóżmy, że U_1 i U_2 są niepustymi, otwartymi podzbiorami $\mathbb{R}^m$, a $\Phi : U_1 \rightarrow U_2$ jest ich dyfeomorfizmem. Obliczymy postać odwzorowania Φ_* . Niech $X \in \Gamma(U_1)$, wówczas X jest postaci $X = \sum_{i=1}^m b_i \partial_i$, gdzie $b_i \in C^\infty(U_1)$. Zatem przyjmując $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m)$ mamy dla $p \in U_2$

$$\begin{aligned}\Phi_*X(f)(p) &= \sum_{i=1}^m b_i(\Phi_{-1}(p)) \partial_i(f \circ \Phi)(\Phi_{-1}(p)) = \\ &= \sum_{i=1}^m b_i(\Phi_{-1}(p)) \sum_{j=1}^m \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}(\Phi_{-1}(p)) \partial_j(f)(p) = \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m b_i(\Phi_{-1}(p)) \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}(\Phi_{-1}(p)) \right) \partial_j(f)(p) = \\ &= \sum_{j=1}^m c_j(p) \partial_j(f)(p),\end{aligned}\tag{3.12}$$

gdzie

$$\begin{aligned}c_j(p) &= \sum_{i=1}^m b_i(\Phi_{-1}(p)) \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}(\Phi_{-1}(p)) = \\ &= (D\Phi)(\Phi_{-1}(p)) \left(b_1(\Phi_{-1}(p)), \dots, b_m(\Phi_{-1}(p)) \right).\end{aligned}$$

Wróćmy do sytuacji ogólnej, gdy U_1, U_2 są podzbiorami rozmaiwości.

Definicja 3.10 Niech M_1 and M_2 będą rozmaiwościami różniczkowymi wymiaru k w $\mathbb{R}^m$, a $U_1 \subset M_1$ i $U_2 \subset M_2$ niech będą otwartymi podzbiorami tych rozmaiwości. Z każdym dyfeomorfizmem $\Phi : U_1 \rightarrow U_2$ zwiążemy odwzorowanie Φ^* modułów n -form różniczkowych

$$\Phi^* : \mathcal{D}^n(U_2) \rightarrow \mathcal{D}^n(U_1),$$

określone wzorem

$$\Phi^*\omega(X_1, \dots, X_n) = \omega(\Phi_*X_1, \dots, \Phi_*X_n)$$

dla $\omega \in \mathcal{D}^n(U_2)$ i $X_1, \dots, X_n \in \Gamma(U_1)$. Odwzorowanie Φ^* nazywa się *przeniesieniem formy różniczkowej ω lub cofnięciem formy różniczkowej ω* .

Dla ujednolicenia zapisu przyjmujemy również

$$\Phi^*f = f \circ \Phi$$

dla dowolnej funkcji $f \in C^\infty(U_2)$.

Lemat 3.5 (a) Jeżeli $\omega \in \mathcal{D}^n(U_2)$ to $\Phi^*\omega$ jest formą różniczkową rzędu n na U_1 .

(b) Odwzorowanie $\Phi^* : \mathcal{D}^n(U_2) \rightarrow \mathcal{D}^n(U_1)$ ma następujące własności:

$$\Phi^*(\omega_1 + \omega_2) = \Phi^*(\omega_1) + \Phi^*(\omega_2), \quad (3.13)$$

$$\Phi^*(f\omega) = \Phi^*(f)\Phi^*(\omega), \quad (3.14)$$

$$\Phi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \Phi^*(\omega_1) \wedge \Phi^*(\omega_2), \quad (3.15)$$

dla dowolnych $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \mathcal{D}^n(U_2)$ i $f \in C^\infty(U_2)$.

Dowód. (a) Addytywność odwzorowania $\Phi^*\omega$ względem dowolnej zmiennej wynika z addytywności Φ^* , por. (3.11), oraz z wieloliniowości ω . Jeżeli $f \in C^\infty(U_1)$, to $f \circ \Phi_{-1} \in C^\infty(U_2)$ oraz $\Phi^*(f \circ \Phi_{-1}) = f \circ \Phi_{-1} \circ \Phi = f$. Jeżeli $X_i \in \Gamma(U_1)$, to z Lematu 3.4 wynika, że

$$\Phi_*(fX_i) = f \circ \Phi_{-1} \Phi_*X_i.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \Phi^*\omega(X_1, \dots, fX_i, \dots, X_n) &= \omega(\Phi_*X_1, \dots, \Phi_*(fX_i), \dots, \Phi_*X_n) = \\ &= f \circ \Phi_{-1} \omega(\Phi_*X_1, \dots, \Phi_*X_i, \dots, \Phi_*X_n) = \Phi^*(f)\Phi^*\omega(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n). \end{aligned}$$

(b) Addytywność (3.13) operatora Φ^* pozostawiamy do udowodnienia Czytelnikowi (Zad. 6.14). Własność (3.14) wynika z równości

$$\Phi^*(f\omega)(X_1, \dots, X_n) = f \circ \Phi \omega(\Phi_* X_1, \dots, \Phi_* X_n) = \Phi^* f \cdot \Phi^* \omega(X_1, \dots, X_n).$$

Aby udowodnić (3.15) zauważmy, że dla $\omega_1 \in \mathcal{D}^n(U_2)$ i $\omega_2 \in \mathcal{D}^\ell(U_2)$ mamy

$$\begin{aligned} \Phi^*(\omega_1 \wedge \omega_2)(X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+\ell}) &= \\ \frac{(n+\ell)!}{n!\ell!} \mathbb{A}(\omega_1 \otimes \omega_2)(\Phi_* X_1, \dots, \Phi_* X_n, \Phi_* X_{n+1}, \dots, \Phi_* X_{n+\ell}) &= \\ \frac{1}{n!\ell!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n+\ell}} \varepsilon_\sigma \omega_1(\Phi_* X_{\sigma(1)}, \dots, \Phi_* X_{\sigma(n)}) \omega_2(\Phi_* X_{\sigma(n+1)}, \dots, \Phi_* X_{\sigma(n+\ell)}) &= \\ \frac{1}{n!\ell!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n+\ell}} \varepsilon_\sigma \Phi^* \omega_1(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) \Phi^* \omega_2(X_{\sigma(n+1)}, \dots, X_{\sigma(n+\ell)}) &= \\ \frac{(n+\ell)!}{n!\ell!} \mathbb{A}(\Phi^* \omega_1 \otimes \Phi^* \omega_2)(X_1, \dots, X_{n+\ell}) &= \\ (\Phi^* \omega_1 \wedge \Phi^* \omega_2)(X_1, \dots, X_{n+\ell}). \end{aligned}$$

■

Przykład 3.7 Niech U_1, U_2 będą niepustymi, otwartymi podzbiorami $\mathbb{R}^m$. Wówczas $\omega \in \mathcal{D}^n(U_2)$ jest postaci

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq m} a_{j_1, \dots, j_n} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_n},$$

(por. Uwaga 3.9 (b)). Zatem korzystając z Lematu 3.5 otrzymujemy

$$\Phi^* \omega = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq m} \Phi^* a_{j_1, \dots, j_n} \Phi^* dx_{j_1} \wedge \dots \wedge \Phi^* dx_{j_n}.$$

Obliczymy $\Phi^* dx_j$. Dla $X = \sum_{i=1}^n b_i \partial_i \in \Gamma(U_1)$ i $p \in U_2$ otrzymujemy, zgodnie z (3.12), że

$$\begin{aligned} \Phi^* dx_j(X)(p) &= dx_j(\Phi_* X) = \sum_{i=1}^n b_i(\Phi_{-1}(p)) \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}(\Phi_{-1}(p)) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}(\Phi_{-1}(p)) dx_i(X)(\Phi_{-1}(p)). \end{aligned}$$

W szczególności jeżeli ω jest m -formą, tzn.

$$\omega = a dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m,$$

to

$$\begin{aligned}
\Phi^* \omega &= \Phi^* a \Phi^* dx_1 \wedge \dots \wedge \Phi^* dx_m = \\
&= \Phi^* a \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{\sigma(1)}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_{\sigma(m)}} dx_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\sigma(m)} = \\
&= \Phi^* a \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m} \varepsilon_\sigma \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{\sigma(1)}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_{\sigma(m)}} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m = \\
&= a \circ \Phi \mathbf{J} \Phi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m
\end{aligned}$$

Lemat 3.6 Niech M_1, M_2, M_3 będą rozmaitościami różniczkowymi wymiaru k w $\mathbb{R}^m$. Niech U_1, U_2, U_3 będą otwartymi podzbiorami odpowiednio M_1, M_2, M_3 . Jeżeli $\Phi_1 : U_1 \rightarrow U_2$ i $\Phi_2 : U_2 \rightarrow U_3$ są dyfeomorfizmami oraz $\Phi = \Phi_2 \circ \Phi_1$, to

$$\Phi_* = (\Phi_2)_* \circ (\Phi_1)_* \quad \text{i} \quad \Phi^* = (\Phi_1)^* \circ (\Phi_2)^*. \quad (3.16)$$

Dowód. Niech $X \in \Gamma(U_1)$. Wówczas dla $f \in C^\infty(U_3)$ mamy

$$\Phi_* X(f) = X(f \circ \Phi) = X(f \circ \Phi_2 \circ \Phi_1) = (\Phi_1)_* X(f \circ \Phi_2) = (\Phi_2)_* \circ (\Phi_1)_* X(f)$$

do dowodzi pierwszej z równości (3.16). Aby wykazać drugą z nich, rozpatrzmy dowolne $\omega \in \mathcal{D}^n(U_3)$ oraz $X_1, \dots, X_n \in \Gamma(U_1)$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\Phi^* \omega(X_1, \dots, X_n) &= \omega(\Phi_* X_1, \dots, \Phi_* X_n) = \\
&= \omega((\Phi_2)_* \circ (\Phi_1)_* X_1, \dots, (\Phi_2)_* \circ (\Phi_1)_* X_n) = \\
&= (\Phi_2)^* \omega((\Phi_1)_* X_1, \dots, (\Phi_1)_* X_n) = \\
&= (\Phi_1)^* \circ (\Phi_2)^* \omega(X_1, \dots, X_n).
\end{aligned}$$

■

3.5 Różniczkowanie form różniczkowych

Definicja 3.11 Niech $U \subset \mathbb{R}^m$ będzie zbiorem niepustym i otwartym i niech

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} a_{i_1, \dots, i_n} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} \quad (3.17)$$

będzie formą różniczkową rzędu n określoną na zbiorze U . Pochodną zewnętrzną (kobrzegiem) formy ω nazywamy formę różniczkową $d\omega$ rzędu $n+1$ na U określoną wzorem

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n+1} \leq m} da_{i_1, \dots, i_n} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{n+1}}. \quad (3.18)$$

Przykład 3.8 (a) Jeżeli ω jest formą rzędu 0 czyli funkcją gładką $\omega = f \in C^\infty(U)$, to

$$d\omega = df = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i .$$

Zatem pochodna zewnętrzna funkcji jest jej różniczką. W szczególności gdy weźmiemy funkcję $f(x) = x_i$, to mamy $df_i = dx_i$, gdzie dx_i są bazowymi formami rzędu 1.

(b) Jeżeli $\omega = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$, $1 \leq n \leq m$ to $d\omega \equiv 0$.

(c) Jeżeli ω jest formą rzędu m , to $d\omega$ jest formą zerową, bo każda forma rzędu $m+1$ jest zerowa.

(d) Jeżeli ω jest formą rzędu n , $1 \leq n \leq m$ to

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} \sum_{j=1}^m \frac{\partial a_{i_1, \dots, i_n}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} .$$

Wykażemy obecnie podstawowe własności operacji, przyporządkowującej formie różniczkowej jej pochodną zewnętrzną.

Twierdzenie 3.5 (podstawowe własności kobręgu) *Niech $U \subset \mathbb{R}^m$ będzie zbiorem niepustym i otwartym. Wówczas*

(a) *jeżeli $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{D}^n(U)$ i $a, b \in \mathbb{R}$, to $d(a\omega_1 + b\omega_2) = ad\omega_1 + bd\omega_2$,*

(b) *jeżeli $\omega \in \mathcal{D}^n(U)$, to $d^2\omega = d(d\omega) = 0$,*

(c) *jeżeli $\omega_1 \in \mathcal{D}^k(U)$ i $\omega_2 \in \mathcal{D}^n(U)$, to*

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = (d\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2 ,$$

(d) *jeżeli $\omega = f \in C^\infty(U)$ jest formą rzędu 0, to $d\omega = df$, gdzie df oznacza różniczkę funkcji f .*

Dowód. (a) Równość $d(a\omega_1) = ad\omega_1$ jest oczywista. Wystarczy więc udowodnić addytywność. Gdy ω_1, ω_2 są funkcjami, czyli $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{D}^0(U)$, to

$$\begin{aligned} d(\omega_1 + \omega_2) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} (\omega_1 + \omega_2) dx_i = \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \omega_1 dx_i + \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \omega_2 dx_i = d\omega_1 + d\omega_2 . \end{aligned}$$

Załóżmy teraz, że $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{D}^n(U)$, gdzie $n > 0$. Niech

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} a_{i_1, \dots, i_n} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} \\ \omega_2 &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} b_{i_1, \dots, i_n} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} . \end{aligned}$$

Z poprzedniego kroku mamy

$$d(a_{i_1, \dots, i_n} + b_{i_1, \dots, i_n}) = da_{i_1, \dots, i_n} + db_{i_1, \dots, i_n}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} d(\omega_1 + \omega_2) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} d(a_{i_1, \dots, i_n} + b_{i_1, \dots, i_n}) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} da_{i_1, \dots, i_n} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} + \\ &+ \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} db_{i_1, \dots, i_n} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} = d\omega_1 + d\omega_2 \end{aligned}$$

co kończy dowód własności (a).

(b) Niech ω będzie dana wzorem (3.17). Wówczas

$$\begin{aligned} d^2\omega &= d(d\omega) = d\left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} a_{i_1, \dots, i_n} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} \right) = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} \sum_{j=1}^m \sum_{\ell=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_\ell} (a_{i_1, \dots, i_n}) dx_\ell \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} \sum_{1 \leq \ell < j \leq m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_\ell} (a_{i_1, \dots, i_n}) - \frac{\partial^2}{\partial x_\ell \partial x_j} (a_{i_1, \dots, i_n}) \right) \\ &\quad dx_\ell \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} = 0 \end{aligned}$$

na podstawie twierdzenia Schwarz'a o pochodnych mieszanych (I, Część 2, Twierdzenie 8.20).

(c) Niech ω_2 będzie postaci (3.17). Załóżymy najpierw, że $\omega_1 \in \mathcal{D}^0(u)$, więc $\omega_1 = f \in C^\infty(U)$. Wówczas

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} f a_{i_1, \dots, i_n} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n},$$

więc

$$\begin{aligned} d(\omega_1 \wedge \omega_2) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} (f a_{i_1, \dots, i_n}) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} = \\ &= f \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} a_{i_1, \dots, i_n} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} + \\ &+ \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} a_{i_1, \dots, i_n} \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} = \\ &= f \wedge \omega_2 + df \wedge \omega_2, \end{aligned}$$

na mocy własności iloczynu zewnętrznego (Twierdzenie 3.3).

Przyjmijmy teraz $\omega_1 = dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$. Korzystając z punktu (d) Twierdzenia 3.3 otrzymujemy

$$\begin{aligned} d(\omega_1 \wedge \omega_2) &= d\left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} a_{i_1, \dots, i_n} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}\right) = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} da_{i_1, \dots, i_n} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} = \\ &= (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \wedge da_{i_1, \dots, i_n} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} = \\ &= (-1)^k dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \wedge \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} da_{i_1, \dots, i_n} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}\right) = \\ &= (d\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2, \end{aligned}$$

bo $d\omega_1 = 0$ (Przykład 3.8 (b)).

Przejdziemy do przypadku ogólnego, gdy

$$\omega_1 = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq m} b_{j_1, \dots, j_k} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}.$$

Korzystając z poprzednich rachunków, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} d(\omega_1 \wedge \omega_2) &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq m} d(b_{j_1, \dots, j_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \wedge \omega_2) = \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq m} b_{j_1, \dots, j_k} \wedge d(dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \wedge \omega_2) + \\ &+ \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq m} db_{j_1, \dots, j_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \wedge \omega_2 = \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq m} (-1)^k b_{j_1, \dots, j_k} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \wedge \omega_2 + \\ &+ \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq m} db_{j_1, \dots, j_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \wedge \omega_2 = \\ &= (d\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2, \end{aligned}$$

co kończy dowód własności (c).

(d) wynika z Przykładu 3.8 (c). ■

Wniosek 3.6 *Pochodna zewnętrzna jest jedynym odwzorowaniem przyporządkowującym każdej formie różniczkowej na niepustym zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^m$ formę o jeden rząd wyższą, która spełnia warunki (a)-(d) Twierdzenia 3.5.*

Dowód. Załóżmy, że $\tilde{d}$ spełnia warunki (a)-(d). Jeżeli ω jest rzędu 0, to z (d) wynika, że $d\omega = d\omega$. Niech $f_i(x) = x_i$. Wtedy $f_i \in C^\infty(U)$ i $\tilde{d}f_i = df_i = dx_i$, zatem z (b) wnioskujemy, że $\tilde{d}(dx_i) = \tilde{d}(\tilde{d}f_i) = 0$. Korzystając z (c) otrzymujemy przez indukcję, że $\tilde{d}(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}) = 0$. Jeżeli ω jest dowolną formą postaci (3.17), to

$$\begin{aligned} \tilde{d}\omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} \tilde{d}(a_{i_1, \dots, i_n} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}) = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} \tilde{d}a_{i_1, \dots, i_n} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} + \\ &+ \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} a_{i_1, \dots, i_n} \wedge \tilde{d}(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}) = d\omega, \end{aligned}$$

gdzie pierwsza równość wynika z warunku (a), druga z warunku (c), a trzecia z poprzednich obliczeń. ■

Twierdzenie 3.6 (o przeniesieniu kobręgu) *Niech $U, V \subset \mathbb{R}^m$ będą zbiorami niepustymi i otwartymi i niech $\Phi : U \rightarrow V$ będzie dyfeomorfizmem U na V . Wówczas, jeżeli $\omega \in \mathcal{D}^n(V)$, to*

$$\Phi^*(d\omega) = d\Phi^*\omega, \quad (3.19)$$

gdzie przeniesienie Φ^* określone jest jak w §6.3.

Dowód przeprowadzimy indukcyjnie względem rzędu formy ω . Niech $n = 0$, tzn. $\omega = f \in C^\infty(V)$. Wówczas $\Phi^*f = f \circ \Phi$ i mamy dla dowolnego pola $X \in \Gamma(U)$

$$(\Phi^*df)(X) = \Phi^*\left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j\right)(X) = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \circ \Phi\right) \Phi^* dx_j(X).$$

Wiemy jednak, że

$$\begin{aligned} \Phi^* dx_j(X)(p) &= dx_j(\Phi_*(X))(p) = \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}(\Phi_{-1}(p)) dx_i(X)(\Phi_{-1}(p)) \end{aligned} \quad (3.20)$$

dla $p \in V$. Zatem

$$\begin{aligned}
 (\Phi^* df)(X) &= \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \circ \Phi \right) \left(\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i} \circ \Phi_{-1} \right) (dx_i(X) \circ \Phi_{-1}) \right) = \\
 &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \circ \Phi \right) \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i} \circ \Phi_{-1} \right) \right) dx_i(X) \circ \Phi_{-1} = \\
 &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f \circ \Phi}{\partial x_i} \circ \Phi_{-1} \right) dx_i(X) \circ \Phi_{-1} = d(\Phi^* f).
 \end{aligned}$$

To kończy dowód równości (3.19) przy $n = 0$.

Przypuśćmy, że (3.19) zachodzi dla dowolnej formy ω rzędu n . Zauważmy wpierw, że z tożsamości (3.20) wynika, że

$$d(\Phi^* dx_j)(X) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x_k \partial x_i} dx_k \wedge dx_i = 0.$$

Wówczas

$$\begin{aligned}
 \Phi^*(d(\omega \wedge dx_i)) &= \Phi^*(d\omega \wedge dx_i + (-1)^n \omega \wedge d(dx_i)) = \Phi^*(d\omega \wedge dx_i) = \\
 \Phi^*(d\omega) \wedge (\Phi^* dx_i) &= d(\Phi^* \omega) \wedge (\Phi^* dx_i) + \Phi^* \omega \wedge d(\Phi^* dx_i) = \\
 &= d(\Phi^* \omega \wedge \Phi^* dx_i) = d(\Phi^*(\omega \wedge dx_i)).
 \end{aligned}$$

Dowolna $(n+1)$ -forma jest sumą form postaci $\omega \wedge dx_i$. Zatem teza wynika z addytywności pochodnej zewnętrznej i operatora Φ^* . ■

Uwaga 3.12 Korzystając z Twierdzeń 3.5 i 3.6 można wykazać, że również na dowolnej rozmaitości różniczkowej M wymiaru k istnieje dokładnie jedno odwzorowanie przekształcające formy różniczkowe rzędu k w formy różniczkowe rzędu $k+1$ spełniające warunki (a)-(d) Twierdzenia 3.5.

Jeżeli (Φ, U) jest mapą rozmaitości M to zbiór U jest dyfeomorficzny z otwartym podzbiorem $\Phi(U) \subset \mathbb{R}^k$ przestrzeni $\mathbb{R}^k$. Możemy zatem przenieść operację pochodnej zewnętrznej ze zbioru $\Phi(U)$ na zbiór U . Z Twierdzenia 3.6 wynika, taka definicja pochodnej zewnętrznej na zbiorze U nie zależy od wyboru mapy, w tym sensie, że jeżeli zbiór U jest w dziedzinie dwóch map to obydwie mapy określają tę samą operację pochodnej zewnętrznej. Standardowa procedura z wykorzystaniem atlasu i związanego z nim rozkładu jedności pozwala rozszerzyć tę operację na całą rozmaitość M . Wreszcie rozumując podobnie jak w dowodzie Wniosku 3.6 pokazujemy jednoznaczność tej operacji.

Warunek (b) Twierdzenia 3.5 pozwala wyróżnić dwa ważne typy form różniczkowych.

Definicja 3.12 Formę różniczkową ω rzędu k , gdzie $k \geq 1$ nazywamy:

- (a) *zamkniętą*, gdy $d\omega = 0$,
- (b) *dokładną*, gdy istnieje forma $\tilde{\omega}$ rzędu $k - 1$ taka, że $d\tilde{\omega} = \omega$.

Uwaga 3.13 Z równości $d^2\omega = 0$ (Twierdzenie 3.5 (b)) wynika natychmiast, że każda forma różniczkowa dokładna jest zamknięta. Jest również rzeczą oczywistą, że każda forma różniczkowa rzędu m określona na zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{R}^m$ jest zamknięta, bo jedyną formą rzędu $m + 1$ jest forma zerowa.

Następujący przykład pokazuje, że nie każda forma zamknięta jest dokładna.

Przykład 3.9 Niech zbiór $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie otwartym kołem jednostkowym $K(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ z usuniętym środkiem, tj. $U = B(0, 1) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^2$. Na U określimy formę ω rzędu 1 wzorem

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy .$$

Czytelnik zechce sprawdzić prostym rachunkiem, że forma ω jest zamknięta (Zad. 6.15). Pokażemy nie wprost, że forma ta nie jest dokładna. Przypuścmy, że forma ω jest dokładna. Zatem istnieje funkcja $f \in C^\infty(U)$ taka, że $df = \omega$, czyli

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} ,$$

dla $(x, y) \in U$, tj. $0 < x^2 + y^2 < 1$. Wprowadzimy na obszarze U współrzędne biegunowe

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad 0 < r < 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi .$$

Ustalmy r_o , $0 < r_o < 1$ i określimy funkcję g zmiennej φ wzorem

$$g(\varphi) = f(r_o \cos \varphi, r_o \sin \varphi) .$$

Jeżeli f jest funkcją klasy C^∞ to g jest gładką funkcją 2π -okresową, w szczególności

$$\lim_{\varphi \rightarrow 2\pi} g(\varphi) = g(0) . \tag{3.21}$$

Obliczymy pochodną funkcji g . Korzystając z reguły Leibniza otrzymujemy

$$\frac{dg}{d\varphi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \equiv 1.$$

Wynika z tego, że funkcja g jest funkcją ściśle rosnącą w przedziale $(0, 2\pi)$ co przeczy warunkowi (3.21). Zatem funkcja f o żądanych własnościach nie istnieje.

Okazuje się, że to czy każda forma zamknięta określona na zbiorze otwartym U jest dokładna zależy od własności zbioru U . Przykładem zbiorów dla których taka własność zachodzi, są zbiory gwiaździste.

Definicja 3.13 Zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^m$ nazywamy *zbiorem gwiaździstym*, gdy istnieje punkt $x_o \in U$ taki, że odcinki łączące x_o z każdym pozoszałym punktem zbioru U są zawarte w tym zbiorze.

Przykładami zbiorów gwiaździstych są niepuste zbiory otwarte i wypukłe. Istnieją jednak także zbiory gwiaździste niewypukłe. Zbiór U z Przykładu 3.9 nie jest gwiaździsty, jak Czytelnik zechce łatwo sprawdzić.

Twierdzenie 3.7 (Poincaré³ o dokładności) *Jeżeli $U \subset \mathbb{R}^m$ jest otwartym zbiorem gwiaździstym, to każda forma różniczkowa rzędu $n \geq 1$ zamknięta na U jest dokładna.*

Dowód. Wykażemy najpierw, że można założyć, iż zbiór U jest gwiaździsty względem punktu 0 w $\mathbb{R}^m$. Przyjmijmy, że U jest gwiaździsty względem pewnego punktu $p_o \in U$. Niech T będzie translacją przestrzeni $\mathbb{R}^m$ taką, że $T(0) = p_o$. Wówczas, jak Czytelnik zechce sprawdzić, że zbiór $T_{-1}(U)$ jest gwiaździsty względem 0 . Odwzorowanie T^* komutuje z pochodną zewnętrzną, zatem przekształca formy zamknięte (dokładne) na U , na formy zamknięte (odpowiednio dokładne) na $T_{-1}(U)$. Możemy więc założyć, że U jest gwiaździsty względem 0 .

Przy tym założeniu określimy odwzorowanie $F : \mathcal{D}^n(U) \rightarrow \mathcal{D}^{n-1}(U)$ takie, że $F(0) = 0$ oraz dla dowolnej formy $\omega \in \mathcal{D}^n(U)$ zachodzi $\omega = F(d\omega) + d(F\omega)$. Niech ω będzie postaci (3.17) (patrz Definicja 3.9). Zbiór U jest gwiaździsty względem 0 , zatem na U możemy określić funkcje gładkie

$$b_{i_1, \dots, i_n, k}(x) = (-1)^{k-1} x_{i_k} \int_0^1 t^{n-1} a_{i_1, \dots, i_n}(tx) dt$$

³Henri Poincaré (1854-1912), matematyk francuski o szerokich zainteresowaniach, profesor Sorbony, współtwórca współczesnej topologii. Zajmował się również równaniami różniczkowymi, geometrią algebraiczną i analizą zespoloną.

dla $1 \leq k \leq n$, gdzie $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m$. Z reguły Leibniza wynika, że

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{i_1, \dots, i_n, k}}{\partial x_j}(x) &= \delta_{i_k, j} (-1)^{k-1} \int_0^1 t^{n-1} a_{i_1, \dots, i_n}(tx) dt + \\ &\quad (-1)^{k-1} x_{i_k} \int_0^1 t^n \frac{\partial a_{i_1, \dots, i_n}}{\partial x_j}(tx) dt \end{aligned}$$

dla $j = 1, \dots, m$, przy czym $\delta_{i_k, j} = 1$ gdy $i_k = j$, $\delta_{i_k, j} = 0$ gdy $i_k \neq j$. Odwzorowanie $F : \mathcal{D}^n(U) \rightarrow \mathcal{D}^{n-1}(U)$ określimy wzorem

$$F(\omega) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} \sum_{k=1}^m b_{i_1, \dots, i_n, k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_k}} \wedge \dots \wedge dx_{i_n},$$

gdzie symbol $\widehat{}$ oznacza, że wyraz dx_{i_k} należy pominąć.

$F(\omega)$ jest oczywiście formą różniczkową rzędu $n-1$, oraz $F(0) = 0$, bo $b_{i_1, \dots, i_n, k} = 0$ jeśli $a_{i_1, \dots, i_n} = 0$. Ponadto,

$$d(F(\omega)) = \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} \sum_{k=1}^m db_{i_1, \dots, i_n, k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_k}} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} = \\ &\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial b_{i_1, \dots, i_n, k}}{\partial x_j}(x) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_k}} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} = \\ &\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \left(\int_0^1 t^{n-1} a_{i_1, \dots, i_n}(tx) dt \right) \\ &\quad dx_{i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_k}} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} + \\ &\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m (-1)^{k-1} x_{i_k} \left(\int_0^1 t^n \frac{\partial a_{i_1, \dots, i_n}}{\partial x_j}(tx) dt \right) \\ &\quad dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_k}} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} = \\ &n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} \left(\int_0^1 t^{n-1} a_{i_1, \dots, i_n}(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} + \\ &\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m (-1)^{k-1} x_{i_k} \left(\int_0^1 t^n \frac{\partial a_{i_1, \dots, i_n}}{\partial x_j}(tx) dt \right) \\ &\quad dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_k}} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}. \end{aligned}$$

Z drugiej strony

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial a_{i_1, \dots, i_n}}{\partial x_j}(x) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}.$$

Rozpatrując analogiczną operację na $n + 1$ formach otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 F(d\omega) = & \quad (3.23) \\
 & \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} \sum_{j=1}^m \left(\int_0^1 t^n \frac{\partial a_{i_1, \dots, i_n}}{\partial x_j}(tx) dt \right) x_j \, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} - \\
 - & \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m (-1)^{k-1} x_{i_k} \left(\int_0^1 t^n \frac{\partial a_{i_1, \dots, i_n}}{\partial x_j}(tx) dt \right) \\
 & dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_k}} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} .
 \end{aligned}$$

Dodając stronami (3.22) i (3.23) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 d(F\omega) + F(d\omega) = & \\
 n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} \left(\int_0^1 t^{n-1} a_{i_1, \dots, i_n}(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} + & \\
 \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} \sum_{j=1}^m \left(\int_0^1 t^n \frac{\partial a_{i_1, \dots, i_n}}{\partial x_j}(tx) dt \right) x_j \, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} = & \\
 \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} (t^n a_{i_1, \dots, i_n}(tx)) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} = & \\
 \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m} a_{i_1, \dots, i_n}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} = \omega &
 \end{aligned}$$

Jeżeli forma ω jest zamknięta to

$$\omega = d(F\omega) + F(d\omega) = d(F\omega) .$$

Zatem ω jest dokładna. ■

Uwaga 3.14 (a) Założenie, że zbiór U jest gwiazdzisty nie jest optymalne, adekwatne założenie trzeba wyrazić w języku topologii. Dotyczy ono problemu ściągalności zbioru do punktu.

(b) Tożsamość $d^2\omega = 0$ ma daleko idące konsekwencje topologiczne. Możemy bowiem rozważać następujący ciąg operatorów liniowych

$$0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{D}^0(M) \xrightarrow{d_1} \mathcal{D}^1(M) \xrightarrow{d_2} \mathcal{D}^2(M) \xrightarrow{d_3} \dots \xrightarrow{d_k} \mathcal{D}^k(M) \xrightarrow{d_{k+1}} 0 ,$$

gdzie M jest rozmaitością wymiaru k , a d_i jest pochodną zewnętrzną

$$d_i : \mathcal{D}^{i-1}(M) \rightarrow \mathcal{D}^i(M) .$$

Równość $d^2\omega = 0$ implikuje zawieranie $\text{Im } d_{i-1} \subset \ker d_i$. To pozwala badać własności topologiczne rozmaitości poprzez własności modułów ilorazowych $H_i = \ker d_i / \text{Im } d_{i-1}$. W przypadku zbioru gwiazdzistego mamy $H_i = \{0\}$ dla dowolnego $i = 1, \dots, k$. Odpowiednia teoria nosi nazwę teorii (kohomologii) de Rhama⁴.

⁴Georges de Rham (1903-1990), matematyk szwajcarski, profesor uniwersytetu w Lozannie.

Rozdział 4

Całkowanie na rozmaiwościach

Celem niniejszego rozdziału jest określenie pojęcia całki na zorientowanej rozmaiwości różniczkowej z brzegiem $M(\hat{\tau})$ oraz uzyskanie dla formy różniczkowej ω równości między całką $\int_{M(\hat{\tau})} d\omega$ po rozmaiwości $M(\hat{\tau})$ oraz całką $\int_{\partial M(\hat{\tau})} \omega$ po brzegu tej rozmaiwości, co stanowić będzie ogólną wersję twierdzenia Stokesa (III, Część 1, Twierdzenie 3.7 i wzór (3.10)). W tym celu musimy wpierw określić całkowanie form różniczkowych.

4.1 Całkowanie form różniczkowych na zbiorach otwartych w $\mathbb{R}^m$

W przypadku gdy rząd formy różniczkowej ω (Definicja 3.6) określonej na rozmaiwości zorientowanej (Definicja 2.14) jest równy wymiarowi tej rozmaiwości możemy określić całkę z formy różniczkowej ω . Niech $U \subset \mathbb{R}^m$ będzie niepustym, spójnym i ograniczonym zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^m$, mierzalnym w sensie Jordana i niech ω będzie formą różniczkową rzędu m na U określoną wzorem

$$\omega(x) = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m \quad \text{dla } x \in U,$$

gdzie $f \in C^\infty(U)$. Jeżeli σ jest dowolną permutacją zbioru $\{1, 2, \dots, m\}$, to

$$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m = (-1)^{\varepsilon_\sigma} dx_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\sigma(m)},$$

gdzie ε_σ oznacza sygnaturę permutacji σ . Zatem

$$\omega(x) = (-1)^{\varepsilon_\sigma} f(x) dx_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\sigma(m)}.$$

Innymi słowy jedynymi możliwymi współczynnikami formy ω są funkcje $f(x)$ lub $-f(x)$ w zależności od tego, czy permutacja $\hat{\tau}$ jest parzysta czy nie. To jednak znaczy, że przedstawienie m -formy jest jednoznaczne jeżeli ustalimy pewną orientację $\hat{\tau}$ przestrzeni $\mathbb{R}^m$ i zarządamy, by orientacja bazy $(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(m)})$ była zgodna z $\hat{\tau}$. Możemy przyjąć zatem następującą definicję:

Definicja 4.1 Niech $\hat{\tau}$ będzie orientacją przestrzeni $\mathbb{R}^m$, a U niepustym, spójnym i ograniczonym zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^m$, mierzalnym w sensie Jordana. Niech ω będzie formą różniczkową rzędu m określoną na U . Jeżeli baza $(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(m)})$ jest zgodna z $\hat{\tau}$ i

$$\omega(x) = f(x) dx_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\sigma(m)}, \quad (4.1)$$

gdzie $f \in C^\infty(U)$ jest funkcją ograniczoną, to całka z formy ω po zbiorze zorientowanym $U(\hat{\tau})$ z orientacją $\hat{\tau}$ nazywamy liczbę

$$\int_{U(\hat{\tau})} \omega = \int_U f(x) dx.$$

Uwaga 4.1 (a) Jeżeli zmienić orientację $\hat{\tau}$ na orientację przeciwną $-\hat{\tau}$, to

$$\omega(x) = -f(x) dx_{\eta(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\eta(m)}, \quad (4.2)$$

gdzie η jest permutacją taką, że orientacja bazy $(e_{\eta(1)}, \dots, e_{\eta(m)})$ jest zgodna z $-\hat{\tau}$. Zatem

$$\int_{U(-\hat{\tau})} \omega = \int_U -f(x) dx = - \int_{U(\hat{\tau})} \omega.$$

(b) Jeżeli forma $\omega \in \mathcal{D}^m(\mathbb{R}^m)$ jest określona wzorem (4.1) i $f \in C_o^\infty(\mathbb{R}^m)$, to zawsze istnieje zbiór ograniczony, spójny i otwarty $U \subset \mathbb{R}^m$, mierzalny w sensie Jordana taki, że $\text{supp } f \subset U$. Co więcej, całka z formy ω nie zależy od wyboru zbioru U zawierającego nośnik funkcji f . Ma zatem sens całka $\int_{\mathbb{R}^m(\hat{\tau})} \omega$, o ile tylko nośnik funkcji f jest zwarty.

Twierdzenie 4.1 (o własnościach arytmetycznych całki z formy)
Jeżeli $\omega, \omega_1 \in \mathcal{D}^m(U)$, gdzie U jest otwartym, spójnym i ograniczonym podzbiorem $\mathbb{R}^m$, mierzalnym w sensie Jordana, to

$$(a) \int_{U(\hat{\tau})} \lambda \omega + \lambda_1 \omega_1 = \lambda \int_{U(\hat{\tau})} \omega + \lambda_1 \int_{U(\hat{\tau})} \omega_1 \quad \text{dla } \lambda, \lambda_1 \in \mathbb{R},$$

$$(b) \int_{U(\hat{\tau})} \omega = - \int_{U(-\hat{\tau})} \omega.$$

Dowód. Pozostawiając (a) Czytelnikowi do samodzielnego wykazania, ograniczymy się do dowodu (b). Niech ω będzie postaci (4.1), gdzie baza $(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(m)})$ jest zgodnie zorientowana z $\hat{\tau}$. Wtedy dla dowolonej bazy $(e_{\eta(1)}, \dots, e_{\eta(m)})$ o orientacji przeciwnej do $\hat{\tau}$ mamy równość (4.2), więc

$$\int_{U(\hat{\tau})} \omega = \int_U f(x) dx = - \int_U (-f(x)) dx = - \int_{U(-\hat{\tau})} \omega.$$

■

Niech $\Phi : U \rightarrow \Phi(U) \subset \mathbb{R}^m$ będzie dyfeomorfizmem. Jeżeli zbiór U jest spójny, to albo $\mathbf{J}\Phi(x) > 0$ dla każdego $x \in U$, tzn. dyfeomorfizm Φ zachowuje orientację $\hat{\tau}$, albo też $\mathbf{J}\Phi(x) < 0$ dla każdego $x \in U$, czyli dyfeomorfizm Φ zmienia orientację $\hat{\tau}$ na przeciwną. Niech $\omega \in \mathcal{D}^m(\Phi(U))$ będzie formą różniczkową rzędu m na $\Phi(U)$, określoną wzorem (4.1) taką, że f jest funkcją ograniczoną. Wówczas jej cofnięcie Φ^*f (Def. 3.10) jest określone wzorem

$$\Phi^*\omega(x) = f \circ \Phi(x) \mathbf{J}\Phi(x) dx_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\sigma(m)}$$

(por. Przykład 3.7). Zatem z twierdzenia o zamianie zmiennych w całce wnosimy, że

$$\int_{U(\hat{\tau})} \Phi^*\omega = \int_{\Phi(U)(\hat{\tau})} \omega \quad \text{gdy } \mathbf{J}\Phi(x) > 0 \text{ dla każdego } x \in U$$

oraz

$$\int_{U(\hat{\tau})} \Phi^*\omega = - \int_{\Phi(U)(\hat{\tau})} \omega \quad \text{gdy } \mathbf{J}\Phi(x) < 0 \text{ dla każdego } x \in U.$$

Wykazaliśmy więc następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.2 (o całce z cofnięcia formy) *Jeżeli $\Phi : U \rightarrow \Phi(U) \subset \mathbb{R}^m$ jest dyfeomorfizmem określonym na otwartym, ograniczonym i spójnym podzbiórze $U \subset \mathbb{R}^m$, mierzalnym w sensie Jordana, oraz forma różniczkowa $\omega \in \mathcal{D}^m(\Phi(U))$ jest dana równością (4.1), gdzie $f \in C_o^\infty(\Phi(U))$, to*

$$\int_{\Phi(U)(\hat{\tau})} \Phi^*\omega = \begin{cases} \int_{\Phi(U)(\hat{\tau})} \omega & \text{gdy } \Phi \text{ zachowuje orientację,} \\ - \int_{\Phi(U)(\hat{\tau})} \omega & \text{gdy } \Phi \text{ zmienia orientację na przeciwną.} \end{cases}$$

4.2 Całka z k -formy różniczkowej na k -wymiarowej rozmaiłości zorientowanej

Niech M będzie spójną zorientowaną rozmaiłością różniczkową wymiaru k i niech $\hat{\tau}$ będzie orientacją tej rozmaiłości. Podobnie jak poprzednio będziemy pisać $M(\hat{\tau})$ i $M(-\hat{\tau})$. O rozmaiłości M założymy ponadto, że spełnia następujący warunek

- (S) istnieje skończony atlas tej rozmaiłości $\{(\Phi_i, U_i)\}_{i=1}^l$ zgodny z orientacją $\hat{\tau}$ taki, że zbiory U_i są spójne oraz zbiory $\Phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^k$ są otwartymi i ograniczonymi podzbiorami $\mathbb{R}^k$, mierzalnymi w sensie Jordana, przy $i = 1, 2, \dots, l$.

Łatwo zauważyć, że powyższe założenia są spełnione, jeżeli M jest rozmaiłością zwartą. Podobnie jeśli M jest rozmaiłością zwartą z brzegiem, to założenia te spełniają zarówno $M^\circ = M \setminus \partial M$ jak i brzeg ∂M (w przypadku ∂M mamy oczywiście $\Phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^{k-1}$).

Rozpatrzmy formę $\omega \in \mathcal{D}^k(M)$. Niech $\{\varphi_i\}_{i=1}^l$ będzie C^∞ -różniczkowalnym rozkładem jedności związanym z pokryciem $\{U_i\}_{i=1}^l$. Wówczas $\omega_i = \varphi_i \omega$ są również formami rzędu k na M oraz

$$\omega = \sum_{i=1}^l \omega_i.$$

Forma $(\Phi_i)_*^{-1} \omega_i$ jest formą rzędu k określoną na otwartym podzbiórze $\Phi_i(U_i)$ w $\mathbb{R}^k$. Niech $\hat{\tau}_e$ będzie *orientacją kanoniczną* w $\mathbb{R}^k$. Określimy całkę $\int_{M(\hat{\tau})} \omega$ przy pomocy całek z $(\Phi_i)_*^{-1} \omega_i$ po $\Phi_i(U_i)(\hat{\tau}_e)$ następująco:

Definicja 4.2 Jeżeli całki

$$\int_{\Phi_i(U_i)(\hat{\tau}_e)} (\Phi_i)_*^{-1} \omega_i \tag{4.3}$$

istnieją dla $i = 1, 2, \dots, l$, to ich sumę

$$\int_{M(\hat{\tau})} \omega = \sum_{i=1}^l \int_{\Phi_i(U_i)(\hat{\tau}_e)} (\Phi_i)_*^{-1} \omega_i \tag{4.4}$$

nazywamy *całką z formy ω na rozmaiłości M* .

Uwaga 4.2 (a) Jeżeli M jest rozmaitością zwartą, to całki (4.3) istnieją dla dowolnego i , zatem całka (4.4) istnieje wówczas dla dowolnej k -formy różniczkowej ω określonej na M .

(b) Powyższe określenie jest poprawne, jeśli nie zależy od wyboru atlasu zgodnego z daną orientacją, ani od użytego rozkładu jedności. Dowód tego poprzedzimy następującym przykładem:

Przykład 4.1 Niech $M = U \subset \mathbb{R}^m$ będzie zbiorem otwartym, ograniczonym i spójnym w sensie Jordana (tj. brzeg zbioru U ma miarę Jordana 0 w $\mathbb{R}^m$; por. II, Część 1, Twierdzenie 4.5). Jeżeli na U zadana jest kanoniczna orientacja $\mathbb{R}^m$, $\hat{\tau} = \hat{\tau}_e$, to zgodnie z tym co zauważyliśmy wcześniej (Uwaga 2.11(a)) jest ona wyznaczona przez jednoelementowy atlas złożony z identyczności $\text{id}\{(U, \text{id})\}$. Wówczas $(\text{id}_{-1})^* = \text{id}^*$ jest również identycznością, zatem definicja wzorem (4.4) pokrywa się z wcześniejszą definicją całki z formy różniczkowej na zbiorze otwartym, spójnym, mierzalnym w sensie Jordana (Definicja 4.1). Jeśli na U zadana jest orientacja przeciwna do orientacji kanonicznej, to wyznaczający ją atlas może być postaci $\{(U, \hat{\text{id}})\}$, gdzie $\hat{\text{id}}(x_1, x_2, \dots, x_m) = (x_1, x_2, \dots, -x_m)$. Wówczas jak Czytelnik zechce sprawdzić, mamy $(\hat{\text{id}}_{-1})^* = (\hat{\text{id}})^* = -\text{id}$. Zatem i w tym przypadku Definicja 4.2 wzorem (4.4) zgadza się z poprzednią.

Lemat 4.1 *Definicja 4.2 nie zależy od wyboru rozkładu jedności i skończonego atlasu zorientowanego zgodnego z wybraną orientacją i spełniającego warunek (S).*

Dowód. Niech $\{(\Phi_i, U_i)\}_{i=1}^l$ i $\{(\Psi_j, V_j)\}_{j=1}^n$ będą atlasami zgodnymi z orientacją rozmaitości M . Niech $\{\varphi_i\}_{i=1}^l$ będzie rozkładem jedności związanym z pierwszym atlasem, a $\{\psi_j\}_{j=1}^n$ rozkładem jedności związanym z drugim atlasem. Niech dla danej formy różniczkowej ω będzie $\omega_i = \varphi_i \omega$, $\tilde{\omega}_j = \psi_j \omega$, $\omega_{i,j} = \varphi_i \psi_j \omega$. Wówczas

$$\omega_i = \sum_{j=1}^n \omega_{i,j} \quad \text{oraz} \quad \tilde{\omega}_j = \sum_{i=1}^l \omega_{i,j}.$$

Mamy więc

$$\int_{M(\hat{\tau})} \omega = \sum_{i=1}^l \int_{\Phi_i(U_i)(\hat{\tau}_e)} (\Phi_i)_{-1}^* \omega_i = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^n \int_{\Phi_i(U_i \cap V_j)(\hat{\tau}_e)} ((\Phi_i)_{-1})^* \omega_{i,j},$$

gdzie $\hat{\tau}_e$ jest orientacją kanoniczną w $\mathbb{R}^k$. Jednak

$$(\Phi_i)_{-1} = ((\Psi_j)_{-1} \circ \Psi_j) \circ (\Phi_i)_{-1} = (\Psi_j)_{-1} \circ ((\Psi_j) \circ (\Phi_i)_{-1}),$$

więc również

$$(\Phi_i)^*_{-1} = (\Psi_j \circ (\Phi_i)_{-1})^* \circ (\Psi_j)^*_{-1}.$$

Ponieważ dyfeomorfizm $\Psi_j \circ (\Phi_i)_{-1}$ zachowuje orientację, więc

$$\int_{\Phi_i(U_i \cap V_j)(\hat{\tau}_e)} (\Phi_i)^*_{-1} \omega_{i,j} = \int_{\Psi_j(U_i \cap V_j)(\hat{\tau}_e)} (\Psi_j)^*_{-1} \omega_{i,j}.$$

W konsekwencji

$$\begin{aligned} \int_{M(\hat{\tau})} \omega &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^n \int_{\Phi_i(U_i \cap V_j)(\hat{\tau}_e)} (\Phi_i)^*_{-1} \omega_{i,j} = \\ &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^n \int_{\Psi_j(U_i \cap V_j)(\hat{\tau}_e)} (\Psi_j)^*_{-1} \omega_{i,j} = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^n \int_{\Psi_j(V_j)(\hat{\tau}_e)} (\Psi_j)^*_{-1} \omega_{i,j} \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{\Psi_j(V_j)(\hat{\tau}_e)} (\Psi_j)^*_{-1} \left(\sum_{i=1}^l \omega_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^n \int_{\Psi_j(V_j)(\hat{\tau}_e)} (\Psi_j)^*_{-1} \tilde{\omega}_j. \end{aligned}$$

■

Twierdzenie 4.3 (własności całki z formy na rozmaiłości)

Jeżeli $\omega, \omega_1 \in \mathcal{D}^k(M)$, gdzie M jest spójną, zorientowaną rozmaiłością wymiaru k spełniającą warunek (S), to

- (a) $\int_{M(\hat{\tau})} \lambda \omega + \lambda_1 \omega_1 = \lambda \int_{M(\hat{\tau})} \omega + \lambda_1 \int_{M(\hat{\tau})} \omega_1$ dla $\lambda, \lambda_1 \in \mathbb{R}$,
- (b) $\int_{M(\hat{\tau})} \omega = - \int_{M(-\hat{\tau})} \omega$.

Dowód. Własność (a) pozostawiamy Czytelnikowi do samodzielnego wykazania. Udowodnimy (b). Niech $\{(\Phi_i, U_i)\}_{i=1}^l$ będzie atlasem zorientowanym zadającym orientację $\hat{\tau}$. Dla $\Phi_i = (\Phi_{i,1}, \dots, \Phi_{i,k})$ oznaczmy $\tilde{\Phi}_i = (\Phi_{i,1}, \dots, -\Phi_{i,k})$. Niech $\{\varphi_i\}_{i=1}^l$ będzie rozkładem jedności związanym z pokryciem $\{U_i\}_{i=1}^l$. Każdy z tych dyfeomorfizmów $\Phi_i \circ (\tilde{\Phi}_i)_{-1} : \tilde{\Phi}_i(U_i) \rightarrow \Phi_i(U_i)$ zmienia orientację na przeciwną, zatem

$$\int_{\Phi_i(U_i)(\hat{\tau}_e)} (\Phi_i)^*_{-1} \omega_i = - \int_{\tilde{\Phi}_i(U_i)(\hat{\tau}_e)} (\tilde{\Phi}_i)^*_{-1} \omega_i$$

dla dowolnej k -formy $\omega \in \mathcal{D}^k(M)$, gdzie $\omega_i = \varphi_i \omega$ przy czym $\hat{\tau}_e$ jest orientacją kanoniczną w $\mathbb{R}^k$. Atlas $\{(\tilde{\Phi}_i, U_i)\}_{i=1}^l$ zadaje orientację przeciwną

do $\widehat{\tau}$. Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{M(\widehat{\tau})} \omega &= \sum_{i=1}^l \int_{\Phi_i(U_i)(\widehat{\tau}_e)} (\Phi_i)^*_{-1} \omega_i = - \sum_{i=1}^l \int_{\widetilde{\Phi}_i(U_i)(\widehat{\tau}_e)} (\widetilde{\Phi}_i)^*_{-1} \omega_i = \\ &= - \int_{M(-\widehat{\tau})(\widehat{\tau}_e)} \omega. \end{aligned}$$

■

Uwaga 4.3 Niech M będzie rozmaiłością różniczkową wymiaru k w $\mathbb{R}^m$ oraz niech ω będzie formą rzędu n określoną w pewnym otoczeniu otwartym Ω rozmaiłości M . Wówczas forma ω indukuje w sposób jednoznaczny pewną formę rzędu n na rozmaiłości M . Aby się o tym przekonać przyjmijmy, że $X_1, \dots, X_n \in \Gamma(M)$ i $p \in M$. Weźmy mapę (Φ, U) rozmaiłości M taką, że $p \in U$. Niech $\widetilde{\Phi} : \widetilde{U} \rightarrow \widetilde{V}$ będzie dyfeomorfizmem związanym z tą mapą. Jeżeli funkcja $\varphi \in C^\infty(U)$ jest równa tożsamościowo 1 w pewnym otoczeniu p , to pole wektorowe φX_i można przedłużyć do pewnego pola wektorowego $\widetilde{X}_i$ określonego na $\widetilde{U} \cap \Omega$, przy czym pole $\widetilde{X}_i$ zeruje się w pewnym otoczeniu brzegu zbioru $\widetilde{U} \cap \Omega$. Zatem pole $\widetilde{X}_i$ może być przedłużone jako 0 na cały zbiór Ω . Z określenia pola $\widetilde{X}_i$ wynika, że $\widetilde{X}_i(q) = X_i(q)$ dla q należącego do pewnego otoczenia punktu p . Przyjmijmy, że

$$\widetilde{\omega}(X_1, \dots, X_n)(p) = \omega(\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_n)(p).$$

Wartość jaką funkcja $\omega(\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_n)$ przyjmuje w punkcie p zależy jedynie od wartości pól wektorowych $\widetilde{X}_i$ w punkcie p . Jednak $\widetilde{X}_i(p) = X_i(p)$, więc definicja $\widetilde{\omega}$ nie zależy od wyboru przedłużenia i mapy. Co więcej, funkcja $p \rightarrow \widetilde{\omega}(X_1, \dots, X_n)(p)$ jest gładką oraz ω jest formą antysymetryczną rzędu n na rozmaiłości M . W dalszym ciągu, jeżeli nie będzie to prowadzić do nieporozumień, tę formę indukowaną na M oznaczać będziemy również przez ω .

Przykład 4.2 (a) Niech M będzie spójną rozmaiłością wymiaru 1, tzn. krzywą w $\mathbb{R}^m$, posiadającą atlas $\{\Phi, M\}$. Wówczas $\gamma = \Phi_{-1}$ jest parametryzacją krzywej M , $\gamma : (a, b) \rightarrow M$. Niech ω będzie jednoformą w $\mathbb{R}^m$, tj. $\omega = a_1 dx_1 + \dots + a_m dx_m$, gdzie $a_i \in C^\infty(U)$, a U jest zbiorem otwartym takim, że $M \subset U \subset \mathbb{R}^m$. Obliczamy $\gamma^* \omega = (\Phi_{-1})^* \omega$. Niech $X \in \Gamma(a, b)$. Wówczas

$$\gamma_*(X)(f) = X(f \circ \gamma) = \sum_{i=1}^m \frac{d\gamma_i}{dt} \partial_i f$$

dla $f \in C^\infty(U)$, gdzie $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$. Zatem

$$\gamma^* \omega(X) = \omega(\gamma_*(X)) = \sum_{i=1}^m \frac{d\gamma_i}{dt} a_i.$$

Jeżeli M jest wyposażona w orientację $\widehat{\tau}$ od a do b , to

$$\int_{M(\widehat{\tau})} \omega = \int_{(a,b)(\widehat{\tau}_e)} \gamma^* \omega = \sum_{i=1}^m \int_a^b \frac{d\gamma_i}{dt}(t) a_i(\gamma(t)) dt.$$

(b) Niech M będzie płatem powierzchniowym wymiaru k w $\mathbb{R}^{k+1}$ nad ograniczonym zbiorem otwartym mierzalnym w sensie Jordana $U \subset \mathbb{R}^k$, tzn.

$$M = \{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^{k+1} : x \in U\},$$

gdzie $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ jest pewną funkcją gładką. Na M istnieje atlas złożony z jednej mapy (Φ, M) , gdzie $\Phi : M \rightarrow U$ jest rzutowaniem, $\Phi(x, \varphi(x)) = x$. Niech ω będzie k -formą określoną w pewnym otoczeniu $\tilde{V}$ rozmaitości M ; zapiszemy ją w postaci

$$\omega = \sum_{i=1}^{k+1} a_i dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_{k+1}, \quad \text{gdzie } a_i \in C^\infty(\tilde{U}).$$

Obliczymy całkę z formy ω na rozmaitości M wyposażonej w orientację wyznaczoną przez atlas (Φ, M) . Niech $\tilde{\Phi} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}$ będzie dyfeomorfizmem związanym z mapą (Φ, M) , przy czym $M \subset \tilde{V} \subset \mathbb{R}^{k+1}$. Niech $\Psi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ będzie dyfeomorfizmem odwrotnym do $\tilde{\Phi}$, tj. $\tilde{\Phi} \circ \Psi = \text{id}_{\tilde{U}}$, $\Psi \circ \tilde{\Phi} = \text{id}_{\tilde{V}}$. Cofnięcie $(\Phi_{-1})^* \omega$ jest k -formą na $U \subset \mathbb{R}^k$, zatem jest postaci

$$(\Phi_{-1})^* \omega = b(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k,$$

oraz

$$b(x) = b(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k(\partial_1, \dots, \partial_k).$$

Zatem

$$b(x) = (\Phi_{-1})^* \omega(\partial_1, \dots, \partial_k) = \omega((\Phi_{-1})_* \partial_1, \dots, (\Phi_{-1})_* \partial_k).$$

Mamy ponadto $\Phi_{-1} = \Psi|_U$, więc dla $f \in C^\infty(\tilde{V})$ i $p \in M$ zachodzi

$$((\Phi_{-1})_* \partial_i) f(p) = \partial_i(f \circ \Phi_{-1})(p) = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_i}(\Phi(p)) \frac{\partial f}{\partial x_j}(p),$$

czyli

$$((\Phi_{-1})_* \partial_i) = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_i} (\Phi(\cdot)) \partial_j \quad \text{dla } i = 1, \dots, k.$$

Ale

$$\frac{\partial \Psi_j}{\partial x_i} (\Phi(p)) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j, \\ 0 & \text{dla } i \neq j, \end{cases}$$

bo $\Phi_{-1} = \Psi|_U$, oraz

$$\frac{\partial \Psi_{k+1}}{\partial x_i} (\Phi(p)) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} (\Phi(p)).$$

W konsekwencji mamy

$$(\Phi_{-1})_* \partial_i = \partial_i + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \partial_{k+1}$$

dla $i = 1, \dots, k$. Dzięki tym tożsamościom otrzymujemy

$$dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{k+1}} ((\Phi_{-1})_* \partial_1, \dots, (\Phi_{-1})_* \partial_k) = 1$$

oraz

$$dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_{k+1} ((\Phi_{-1})_* \partial_1, \dots, (\Phi_{-1})_* \partial_k) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

gdzie $1 \leq i \leq k$. Zatem

$$\omega((\Phi_{-1})_* \partial_1, \dots, (\Phi_{-1})_* \partial_k) = \sum_{i=1}^k a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a_{k+1}$$

oraz

$$\int_{M(\widehat{\tau})} \omega = \int_U \left(\sum_{i=1}^k a_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) + a_{k+1}(x) \right) dx.$$

4.3 Ogólne twierdzenie Stokesa

Udowodnimy teraz najważniejsze twierdzenie rachunku całkowego form różniczkowych, jakim jest niewątpliwie twierdzenie Stokesa. Niech $(M, \widehat{\tau})$ będzie rozmaitością zwartą zorientowaną wymiaru k z brzegiem, $M \subset \mathbb{R}^m$.

Niech ω będzie formą różniczkową rzędu $k - 1$ określoną w pewnym otoczeniu rozmaitości M . Wówczas pochodna zewnętrzna $d\omega$ jest formą rzędu k . Istnieją zatem całki

$$\int_{M(\hat{\tau})} d\omega \quad \text{ i } \quad \int_{\partial M(\hat{\tau})} \omega$$

Twierdzenie Stokesa orzeka, że obydwie te całki są sobie równe. Zanim przejdziemy do sformułowania i udowodnienia tego twierdzenia, prześledźmy wspomniany związek na najprostszym przykładzie gdy M jest rozmaitością wymiaru 1, a ω jest formą rzędu 0, czyli funkcją klasy $C^\infty(\mathbb{R}^m)$.

Przykład 4.3 Niech rozmaitość M będzie krzywą w $\mathbb{R}^m$ o parametryzacji $\gamma :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^m$ i niech $\omega = f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ będzie 0-formą. Wówczas

$$d\omega = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Jeżeli $\hat{\tau}$ jest orientacją krzywej M od punktu $\gamma(a)$ do $\gamma(b)$, to

$$\begin{aligned} \int_{M(\hat{\tau})} d\omega &= \sum_{i=1}^m \int_a^b \frac{d\gamma_i}{dt}(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) dt = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt = \\ &= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_{\partial M(\hat{\tau})} \omega. \end{aligned}$$

Zatem w przypadku tym zachodzi tożsamość, o której wspomnieliśmy wyżej.

Twierdzenie 4.4 (Stokesa) Niech $(M, \hat{\tau})$ będzie zwartą, zorientowaną rozmaitością wymiaru k z brzegiem, $M \subset \mathbb{R}^m$. Jeżeli ω jest formą różniczkową rzędu $k - 1$ określoną w pewnym otoczeniu rozmaitości M , to zachodzi równość

$$\int_{M(\hat{\tau})} d\omega = \int_{\partial M(\hat{\tau})} \omega. \quad (4.5)$$

Dowód przeprowadzimy w trzech krokach.

I krok. Rozpatrzmy najpierw $(k - 1)$ -formę różniczkową określoną na zbiorze

$$\mathbb{R}_-^k = \{(x_1, \dots, x_k) : x_1 \leq 0\}.$$

Zbiór $\mathbb{R}_-^k$ jest k -wymiarową spójną rozmaitością z brzegiem

$$\partial \mathbb{R}_-^k = \{(x_1, \dots, x_k) : x_1 = 0\},$$

którą możemy utożsamić z $(k-1)$ -wymiarową przestrzenią $\mathbb{R}^{k-1}$. Załóżmy, że orientacja na $\mathbb{R}_-^k$ jest zadana przez kanoniczną orientację przestrzeni $\mathbb{R}^k$. Niech

$$\omega = \sum_{j=1}^k a_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_k,$$

gdzie $a_j \in C_o^\infty(\mathbb{R}^k)$. Wówczas

$$d\omega = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{\ell=1}^k \frac{\partial a_j}{\partial x_\ell} dx_\ell \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_k \right).$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_j}{\partial x_\ell} dx_\ell \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_k = \\ \begin{cases} 0 & \text{gdy } \ell \neq j \\ (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k & \text{gdy } \ell = j \end{cases} \end{aligned}$$

więc

$$d\omega = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k.$$

Ponieważ wszystkie funkcje a_j mają zwarte nośniki, więc

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\partial a_j}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_k) dx_1 = a_1(0, x_2, \dots, x_k)$$

oraz

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial a_j}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_k) dx_j = \\ \lim_{t \rightarrow \infty} [a_j(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_k) - a_j(x_1, \dots, x_{j-1}, -t, x_{j+1}, \dots, x_k)] \\ = 0 \end{aligned}$$

dla $j > 1$. Zatem

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_-^k} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 \dots dx_k &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \dots dx_k = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} a_1(0, x_2, \dots, x_k) dx_2 \dots dx_k, \\ \int_{\mathbb{R}_-^k} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 \dots dx_k &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_j \right) dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_k = 0 \end{aligned}$$

dla $j > 1$. W konsekwencji

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_-^k(\hat{\tau})} d\omega &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \int_{\mathbb{R}_-^k} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 \dots dx_k = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} a_1(0, x_2, \dots, x_k) dx_2 \dots dx_k. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Z drugiej strony, jeżeli $X_1, \dots, X_{k-1} \in \Gamma(\partial\mathbb{R}_-^k)$ i $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{k-1} \in \Gamma(\mathbb{R}^k)$ są przedłużeniami pól $X_1, \dots, X_{k-1}$ na $\mathbb{R}^k$, to dla dowolnego punktu $x \in \partial\mathbb{R}_-^k$ i każdego $j > 1$ mamy

$$(dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_k)(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{k-1})(x) = 0,$$

gdyż pierwsze współrzędne wektorów $\tilde{X}_i(x)$ są równe zero. Zatem forma ω indukuje na $\partial\mathbb{R}_-^k$ formę postaci

$$a_1(x) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_k.$$

To daje wzór

$$\int_{\partial\mathbb{R}_-^k(\hat{\tau})} \omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} a_1(0, x_2, \dots, x_k) dx_2 \dots dx_k, \quad (4.7)$$

gdyż orientacja kanoniczna na $\mathbb{R}^k$ indukuje na $\partial\mathbb{R}_-^k$ orientację wyznaczoną przez bazę $(e_2, \dots, e_k)$. Z równości (4.6) i (4.7) wynika (4.5).

Jeżeli na $\mathbb{R}_-^k$ wybrano orientację $\hat{\tau}$ przeciwną do kanonicznej, to

$$\int_{\mathbb{R}_-^k(\hat{\tau})} d\omega = - \int_{\mathbb{R}_-^k(-\hat{\tau})} d\omega = - \int_{\mathbb{R}^{k-1}} a_1(0, x_2, \dots, x_k) dx_2 \dots dx_k$$

oraz

$$\int_{\partial\mathbb{R}_-^k(\hat{\tau})} \omega = - \int_{\partial\mathbb{R}_-^k(-\hat{\tau})} d\omega = - \int_{\mathbb{R}^{k-1}} a_1(0, x_2, \dots, x_k) dx_2 \dots dx_k,$$

więc również otrzymujemy (4.5).

II krok. Niech (Φ, U) będzie mapą rozmaitości M , a $\tilde{\Phi} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$ dyfomorfizmem związanym z tą mapą. Niech $\varphi \in C_o^\infty(\tilde{U})$. Oznaczmy $\tilde{\omega} = \varphi\omega$. Wówczas na podstawie kroku I mamy

$$\begin{aligned} \int_M d\tilde{\omega} &= \int_U d\tilde{\omega} = \int_{\Phi(U)} (\Phi_{-1})^* d\tilde{\omega} = \int_{\Phi(U)} d((\Phi_{-1})^* \tilde{\omega}) = \\ &= \int_{\Phi(U) \cap \mathbb{R}^{k-1}} (\Phi_{-1})^* \tilde{\omega} = \int_{\Phi(U \cap \partial M)} (\Phi_{-1})^* \tilde{\omega} = \int_{\partial M \cap U} \tilde{\omega}. \end{aligned}$$

III krok. Niech $\{(\Phi_i, U_i)\}_{i=1}^l$ będzie zorientowanym atlasem rozmaitości M . Niech $\{\tilde{\varphi}_i\}_{i=1}^l$ będzie rodziną funkcji gładkich takich, że $\text{supp } \tilde{\varphi}_i \subset \tilde{U}_i$ oraz $\sum_{i=1}^l \tilde{\varphi}_i(x) = 1$ dla $x \in V$, gdzie V jest pewnym zbiorem otwartym takim, że $M \subset V$ i $V \subset \bigcup_{i=1}^l \tilde{U}_i$. Wówczas

$$\omega = \sum_{i=1}^l \tilde{\varphi}_i \omega = \sum_{i=1}^l \tilde{\omega}_i \text{ na zbiorze } V.$$

Zatem na podstawie kroku II,

$$\int_{M(\hat{\tau})} d\omega = \sum_{i=1}^l \int_{M(\hat{\tau})} d\tilde{\omega}_i = \sum_{i=1}^l \int_{\partial M(\hat{\tau})} \tilde{\omega}_i = \int_{\partial M(\hat{\tau})} \sum_{i=1}^l \tilde{\omega}_i = \int_{\partial M(\hat{\tau})} \omega.$$

Otrzymaliśmy więc równość (4.5). ■

Uwaga 4.4 Twierdzenie Stokesa pozostaje prawdziwe przy nieco osłabionych założeniach dotyczących regularności współczynników formy różniczkowej jak i gładkości brzegu. W szczególności twierdzenie to zachodzi dla form różniczkowych klasy C^r , $r \in \mathbb{N}$ (por. Uwaga 3.8). Wystarczy również założyć, że brzeg jest kawałkami gładki. Nie będziemy się jednak dalej zajmować tymi zagadnieniami. Zainteresowanego Czytelnika odsyłamy do literatury (por. np. L.Schwartz, Analiza matematyczna, Tom II, PWN, Warszawa 1980).

Jako natychmiastowe konsekwencje otrzymujemy znane nam dobrze klasyczne wzory Greena, Gaussa i Stokesa w przypadku trójwymiarowym (por. II, Część 1, Twierdzenie 3.24 oraz III, Część 1, Twierdzenia 3.3 i 3.7), o ile ograniczyć się w nich do funkcji P, Q, R klasy C^∞ . Sformułujemy je w postaci wniosków z Twierdzenia 4.4, proponując Czytelnikowi samodzielne wprowadzenie ich z Twierdzenia.

Wniosek 4.1 (wzór Greena) Niech U będzie zbiorem otwartym, spójnym i zorientowanym w $\mathbb{R}^2$ takim, że jego brzeg ∂U jest zwartą rozmaitością wymiaru 1. Niech ω będzie 1-formą określoną w pewnym otoczeniu domknięcia $\bar{U}$ zbioru U postaci $\omega = Pdx_1 + Qdx_2$. Wówczas

$$\int_{\partial U} Pdx_1 + Qdx_2 = \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2.$$

Wniosek 4.2 (wzór Gaussa) Niech U będzie zbiorem otwartym, spójnym i zorientowanym w $\mathbb{R}^m$ takim, że jego brzeg ∂U rozmaitością wymiaru

2. Niech ω będzie 2- formą określoną w pewnym otoczeniu domknięcia $\overline{U}$ zbioru U postaci $\omega = P dx_2 \wedge dx_3 + Q dx_3 \wedge dx_1 + R dx_1 \wedge dx_2$. Wówczas

$$\begin{aligned} \int_{\partial U} P dx_2 \wedge dx_3 + Q dx_3 \wedge dx_1 + R dx_1 \wedge dx_2 &= \\ &= \int_U \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3. \end{aligned}$$

Wniosek 4.3 (klasyczny wzór Stokesa) Niech M będzie rozmaitością zwartą, spójną i zorientowaną wymiaru 2 z brzegiem ∂M , zawartą w $\mathbb{R}^3$. Niech ω będzie jednoformą określoną w pewnym otoczeniu rozmaitości M postaci $\omega = P dx_1 + Q dx_2 + R dx_3$. Wówczas

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} P dx_1 + Q dx_2 + R dx_3 &= \int_M \left(\frac{\partial R}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 + \\ &+ \left(\frac{\partial P}{\partial x_3} - \frac{\partial R}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 . \end{aligned}$$