

## PROGRAM WYKŁADU Z ANALIZY MATEMATYCZNEJ 1 – ANA 111

### 1. Wstępne wiadomości o funkcjach

— Definicja funkcji, składanie funkcji, funkcja odwrotna, wykres funkcji.

### 2. Liczby rzeczywiste

— Aksjomaty zbioru liczb rzeczywistych.

— Zbiory ograniczone, kresy, konsekwencje aksjomatu kresu górnego: zasada Archimede-  
sa, gęstość zbioru liczb wymiernych, przedstawienie dziesiętne liczby rzeczywistej.

— Istnienie pierwiastka, potęga, logarytm oraz ich własności (bez dowodu).

— Wartość bezwzględna, interpretacja geometryczna zbioru liczb rzeczywistych.

— Rozszerzony zbiór liczb rzeczywistych.

— Podstawowe twierdzenia związane z zupełnością zbioru liczb rzeczywistych:

— lemat Ascoliego (o ciągu przedziałów zstępujących);

— pokrycie, twierdzenie Heinego-Borela;

— punkt skupienia zbioru, twierdzenie Bolzano-Weierstrassa.

### 3. Ciągi liczbowe

— Definicja ciągu zbieżnego.

— Własności ciągów zbieżnych.

— Ciągi monotoniczne.

— Liczba  $e$ .

— Podciągi.

— Ciągi Cauchy'ego, zupełność zbioru liczb rzeczywistych.

— Granice dolna i górna, zbieżność niewłaściwa.

### 4. Szeregi liczbowe

— Definicja szeregu zbieżnego, warunek Cauchy'ego i warunek konieczny zbieżności, szeregi: geometryczny i harmoniczny.

— Operacje na szeregach.

— Szeregi o wyrazach nieujemnych, kryteria zbieżności: porównawcze, pierwiastkowe, ilorazowe, zasada zagęszczania Cauchy'ego.

— Szeregi o wyrazach dowolnych znaków, kryteria: Dirichleta, Abela i Leibniza.

— Zbieżność bezwzględna i warunkowa, zmiana kolejności wyrazów szeregu, twierdzenie Riemanna (bez dowodu).

— Mnożenie szeregów, twierdzenie Mertensa.

— Szeregi dwustronne.

### 5. Granica funkcji

— Definicje granicy funkcji w sensie Cauchy'ego i Heinego.

— Działania arytmetyczne na granicach, granice a nierówności, granica funkcji złożonej.

— Granice jednostronne.

— Granice nieskończone i granice w nieskończoności.

### 6. Funkcje ciągłe

— Definicja funkcji ciągłej.

— Własności lokalne funkcji ciągłych.

— Nieciągłości.

— Własność Darboux.

— Twierdzenie Weierstrassa o osiaganiu kresów.

— Ciągłość jednostajna, twierdzenie Cantora.

— Monotoniczność a ciągłość, ciągłość funkcji odwrotnej.

— Ciągłość funkcji elementarnych.

## 7. Pochodne

- Definicja i interpretacja geometryczna pochodnej, różniczka.
- Różniczkowalność a ciągłość.
- Działania arytmetyczne na funkcjach różniczkowalnych.
- Twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej i o pochodnej funkcji odwrotnej.
- Pochodne wyższych rzędów.

## 8. Zastosowania pochodnych

- Twierdzenia o wartości średniej w rachunku różniczkowym.
- Monotoniczność, ekstrema, warunki konieczne i dostateczne na istnienie ekstremum funkcji różniczkowalnej.
- Wzór Taylora.
- Funkcje wypukłe, punkty przegięcia, warunki konieczne i dostateczne na wypukłość funkcji różniczkowalnej.
- Symbole nieoznaczone, reguła de l'Hôpitala.
- Badanie przebiegu zmienności funkcji.

## 9. Elementy teorii przestrzeni metrycznych I

- Definicja i przykłady przestrzeni metrycznych.
- Przestrzeń  $\mathbb{R}^n$  jako przestrzeń metryczna.
- Zbiory otwarte i domknięte.
- Domknięcie, wnętrze i brzeg zbioru.
- Ciągi zbieżne w przestrzeniach metrycznych. Zbieżność w przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ .
- Przestrzenie zupełne. Zupełność przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ . Twierdzenie Banacha o kontrakcji.
- Granica funkcji. Granica podwójna a granice iterowane.
- Ciągłość.

## LITERATURA

- [1] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. 1 i 2 Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007.
- [2] K. Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje jednej zmiennej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008.
- [3] H. i J. Musielakowie, *Analiza matematyczna*, t. I, cz. 1 i 2, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2004 (t. 1, cz. 1), 2002 (t. 1, cz. 2).
- [4] W. Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2009.
- [5] A. Sołtysiak, *Analiza matematyczna, Część I*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2009.